

# コヒーレントシンクロトロン放射光と ビームダイナミクス

高エネルギー加速器研究機構  
島田 美帆

# 目次

1	はじめに	1
2	コヒーレントシンクロトロン放射光 (CSR) とインコヒーレントシンクロトロン放射光	1
2.1	Liénard – Wiechert ポテンシャル	1
2.2	シンクロトロン放射光	2
2.3	コヒーレントシンクロトロン放射光	3
3	CSR の電子バンチに及ぼす影響	5
3.1	Frenet-Serret 座標系の定義	5
3.2	相互作用ハミルトニアンとローレンツ力	5
3.3	CSR の影響によるエネルギー分布と軌道の変化	6
3.4	偏向電磁石の端における CSR の影響	9
3.5	チャンパーによる遮蔽効果	11
3.6	様々なシミュレーションコード	13
3.7	シミュレーションコードによる計算結果の比較	18
4	CSR の影響とビームダイナミクス	19
4.1	ビームダイナミクスの基礎	19
4.2	偏向電磁石からなる光学系によるバンチ圧縮	21
4.3	R 行列によるエミッタンスの計算	23
4.4	位相調整法によるエミッタンス劣化の最小化	24
4.5	エンヴェロープ・マッチングによるエミッタンス劣化の最小化	26
4.6	コンパクト ERL の周回部の最適化	26
5	謝辞	29
A	遮蔽効果を含めたインピーダンスの導出	30

# 1 はじめに

次世代放射光施設には、高輝度、サブピコ秒短パルス X 線の実現が期待されている。このような X 線を発生させるには、位置・角度広がり指標であるエミッタンスと呼ばれる量が小さく、短いバンチ長の電子ビームが必要不可欠である。しかし、従来の蓄積リング型放射光加速器には平衡状態が存在し、電子ビームのエミッタンスやバンチ長は加速器の仕様で制限されてきた。そこで、OHO'08 のテーマであるエネルギー回収型線形加速器 (Energy Recovery Linac, ERL) が注目を集めている。ERL では平衡状態が存在しないため、電子銃で作られた状態のビームを劣化させることなく輸送できることが最大の特徴である。したがって、ERL によって、これまでに以上の低エミッタンス・短バンチ電子ビームが実現する可能性があるのである。

短バンチ電子ビームから期待される物理にコヒーレントシンクロトロン放射光 (Coherent Synchrotron Radiation, CSR) がある。CSR とは偏向電磁石などによって電子の軌道が曲げられたときに短バンチから発生するシンクロトロン放射光 (SR) のうち、位相が揃っている成分のことを指す。この CSR はパワーが強く、コヒーレント性の高い放射光源として期待されている。バンチ長以上の波長でコヒーレント性が高くなるため、バンチ長が短いほど強い放射光となる。

しかし、この短バンチ電子ビームによってこれまでになかったビームダイナミクスの問題が議論されるようになった。短いバンチが自ら発生した CSR によって摂動が加わってしまうのである。加速器物理ではこの摂動を wake (航跡場) と呼ぶ。wake とはチャンパーや加速空洞など、電子ビームを取り巻く環境によって電磁場に歪みが生じ、ビーム物理に影響を与えることを指す。通常の wake では先に通過した電子によって引き起こされ、後続の電子に摂動が与えられるが、CSR wake の場合はバンチ後方の電子が、バンチ先頭に影響を及ぼす。この影響によって、バンチ内のエネルギー分布や軌道が変化し、エミッタンスの増加やバンチ長の伸長などの悪影響を及ぼしてしまう。

本テキストでは第 2 章で、CSR の光源としての性質をインコヒーレントな高周波数のシンクロトロン放射光

(通常のシンクロトロン放射光) と比較しながら説明する。第 3 章では CSR の電子バンチに及ぼす影響や遮蔽効果の解析解やその導出について説明し、数多く公開されている計算コードを紹介する。第 4 章では、エミッタンスの増加やバンチ長の伸長などのメカニズムについて説明するとともに、これらの影響を最小にするビームダイナミクスの最適化の手法について説明する。第 2 章、第 3 章がとっつきにくいと感じられたら、この章から読むことをお勧めしたい。本テキストは 3.6 章を除いてガウス単位系を使用する。

# 2 コヒーレントシンクロトロン放射光 (CSR) とインコヒーレントシンクロトロン放射光

J. Schwinger が加速電子からの放射光を数式で書き下したときには、特別なケースで扱ったのは CSR ではなく、バンチ長よりも短い波長のインコヒーレントな放射光であったが、現在ではその立場が逆転してしまったようである [1]。本章では、シンクロトロン放射光や CSR wake (第 3 章) の解析解の導出に必要な Liénard – Wiechert ポテンシャルの説明を行い、通常のシンクロトロン放射光とコヒーレントシンクロトロン放射光の特徴について比較する。

## 2.1 Liénard – Wiechert ポテンシャル

まず、単位電荷量をもつ点電荷が位置  $r_0$  で静止している場合を考える。すると、 $r$  におけるポテンシャルは次のように表すことができる [2]。

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (2.1)$$

式 (2.1) は  $r$  と  $r_0$  のみで決定する関数であり、このようなある点の単位物理量が別の点に及ぼす場を表す関数をグリーン関数 (Green function) と呼ぶ。加速器で扱う電子のように、光速に近い速度で運動している電荷量  $-e$

の点電荷  $n$  が作る電磁場は、運動の軌跡を  $r_n(t)$  と表すと Maxwell 方程式より次の波動方程式を満たす。

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Phi_n(\mathbf{r}, t) &= 4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}_n(\mathbf{r}, t) &= 4\pi e \beta(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここで  $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$  の 3 次元ベクトルであり、

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad c\beta(t) \equiv d\mathbf{r}_n/dt$$

である。式 (2.2) を満たすグリーン関数は次のようになる。

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c - (t - t_0))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (2.3)$$

ここで、 $c$  は光速であり、デルタ関数は  $\int \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1$  を満たすものとする。因果律より  $t_0 < t$  の領域を扱うところから遅延グリーン関数と呼ばれる。この遅延グリーン関数から導出されるポテンシャルを一般的に Liénard – Wiechert ポテンシャル呼ぶ。式 (2.2) を満たすスカラーポテンシャル  $\Phi_n(\mathbf{r}, t)$ 、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}_n(\mathbf{r}, t)$  の解は次のように書き下すことができる [3]。

$$\begin{aligned} \Phi_n(\mathbf{r}, t) &= \int d\mathbf{r}_0 dt_0 e \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n(t_0)) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0), \\ \mathbf{A}_n(\mathbf{r}, t) &= \int d\mathbf{r}_0 dt_0 \beta(t_0) e \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n(t_0)) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) \end{aligned}$$

$p = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c - (t - t_0)$  とおいて  $p$  に変数を変換して計算すると、Liénard – Wiechert ポテンシャルは次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \Phi_n(\mathbf{r}, t) &= \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(\bar{t})| - \boldsymbol{\beta}(\bar{t}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(\bar{t}))}, \\ \mathbf{A}_n(\mathbf{r}, t) &= \frac{e\boldsymbol{\beta}(\bar{t})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(\bar{t})| - \boldsymbol{\beta}(\bar{t}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(\bar{t}))} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$\bar{t}$  は遅延時間であり、次の方程式を満たす。

$$t - \bar{t} = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(\bar{t})|}{c} \quad (2.5)$$

ここで電荷分布  $\rho(\mathbf{r}, t)$  が与えられた場合は、全体のスカラーポテンシャル  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  およびベクトルポテンシ

ル  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  は重ねあわせで求めることができ、

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &= \int d\mathbf{r}_0 dt_0 \rho(\mathbf{r}_0, t_0) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0), \\ &= \int d\mathbf{r}_0 \rho(\mathbf{r}_0, t) \Phi_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \int d\mathbf{r}_0 dt_0 \beta \rho(\mathbf{r}_0, t_0) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) \\ &= \int d\mathbf{r}_0 \beta \rho(\mathbf{r}_0, t) \mathbf{A}_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t) \end{aligned}$$

となる。ここで、電荷分布  $\rho(\mathbf{r}, t)$  は次の様に定義した。

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \quad (2.6)$$

## 2.2 シンクロトロン放射光

シンクロトロン放射光の解説は OHO'08 の原田さんの解説がすばらしいので、詳しくはそちらを参考にしてほしい。ここでは、放射光強度の導出に関する概要のみをまとめた [4]。

式 (2.4) の Liénard – Wiechert ポテンシャルを簡単な表示にするために、 $L \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(\bar{t})|$  とし、法線ベクトル  $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(\bar{t}))/L$  を導入する。すると、

$$\begin{aligned} \Phi_n(\mathbf{r}, t) &= \frac{e}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})L}, \\ \mathbf{A}_n(\mathbf{r}, t) &= \frac{e\boldsymbol{\beta}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})L} \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる。このポテンシャルを元に数学的に処理を行うと、電場  $\mathbf{E}$  は  $\mathbf{r}$  と  $t$  の関数で以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{e(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{\gamma^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 L^2} \\ &\quad + \frac{e \mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{c(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 L} \end{aligned} \quad (2.8)$$

ここで  $\gamma$  はローレンツ因子 (Lorentz factor) と呼ばれる変数で、 $\gamma^2 \equiv 1/(1 - \beta^2)$  である。式 (2.8) は加速度  $\dot{\boldsymbol{\beta}} \equiv d\boldsymbol{\beta}/dt$  が含まれないクーロン場 (第 1 項) と、含む加速度依存の場 (第 2 項) に分けている。通常、放射光源となる電子エネルギーでは  $\gamma^{-2} \ll 1$  であるため第 1 項を無視する<sup>1</sup>。

<sup>1</sup>最大エネルギーまで加速する前の低エネルギーのビームダイナミクスを扱う際には、このクーロン場が無視できなくなる。

式 (2.8) の第 2 項から、単位時間当たりの放射エネルギーを表す Larmor の公式を導くことができる。

$$P = \frac{2}{3} \frac{r_e}{mc} \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) \quad (2.9)$$

ここで、 $m$  および  $r_e$  はそれぞれ電子の質量および古典半径であり、運動量  $\mathbf{p}$  は  $\mathbf{p} \equiv \gamma mc\boldsymbol{\beta}$  とする。これはローレンツ変換で不変な量である。 $\boldsymbol{\beta}$  を使って書き直すと、

$$P_{SR} = \frac{2}{3} r_e mc \gamma^6 [(\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2] \quad (2.10)$$

となる。偏向電磁石で加速された場合を想定すると、近似式は次のようになる。

$$P_{SR} = \frac{2}{3} \frac{r_e mc^3}{R^2} \beta^4 \gamma^4 \quad (2.11)$$

ここで、 $R$  は軌道の曲率半径である。

放射光の角度拡がりについて補足しよう。ここで、放射角度  $\theta_{\text{rad}}$  の拡がりを  $\langle \theta_{\text{rad}}^2 \rangle^{1/2}$  と定義する。これは放射光の周波数  $\omega$  によって異なり、臨界周波数  $\omega_c$  に近い高い周波数では

$$\langle \theta_{\text{rad}}^2 \rangle^{1/2} \sim \frac{1}{\gamma} \quad (2.12)$$

となるのに対し、 $\omega \ll \omega_c$  となる低い周波数では

$$\langle \theta_{\text{rad}}^2 \rangle^{1/2} \sim \left( \frac{3c}{\omega R} \right)^{1/3} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{2\omega_c}{\omega} \right)^{1/3} \quad (2.13)$$

となる。ここで、臨界周波数  $\omega_c$  とは高い周波数の限界付近を指し、次のように定義される。

$$\omega_c = \frac{3}{2} \gamma^3 \frac{c}{R} \quad (2.14)$$

これより高い周波数で放射光の強度は急激に小さくなる<sup>2</sup>。参考に放射光スペクトルの模式図の図 2.2 に臨界周波数  $\omega_c$  の位置を示す。式 (2.13) は、より低い周波数では高い周波数に比べて  $(2\omega_c/\omega)^{1/3}$  倍も広い角度で放射することを意味する。

### 2.3 コヒーレントシンクロトロン放射光

バンチ長よりもシンクロトロン放射光の波長が長い場合は、それぞれの電子から放射する放射光の位相が揃う

<sup>2</sup>臨界周波数の定義は参考文献 [4] による。

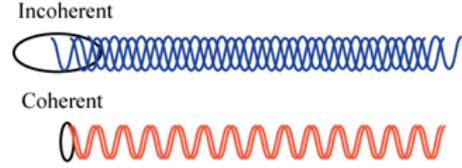


図 2.1: バンチから発生する位相の揃っていない通常のシンクロトロン放射光とコヒーレントシンクロトロン放射光 (CSR)

ため、強度が桁違いに大きくなる。これは、バンチ長が短いほど高い周波数の放射光で位相が揃い、CSR のパワーが強くなることを意味する。模式図を図 2.1 に示す。バンチ長は有限であるためにすべての放射光の位相が完全に一致することはなく、部分的にコヒーレントとなる。この章では、そのコヒーレントな放射光とインコヒーレントな放射光の割合を示すフォームファクタ - (Form Factor) について説明する [5]。

ここで、 $N$  個の電子からなるバンチを考える。簡単のために粒子の運動は進行方向の一次元で考え、各電子からの放射光のパワーは  $P_{SR}(k)$  と等しく、位相だけが異なっているものとする。ある点から距離  $z_n$  ( $n=1, \dots, N$ ) だけ離れた  $N$  個の電子について位相を重ね合わせると、波数  $k$  に対しては  $\sum_{n=1}^N \exp(ikz_n)$  となる。この位相からなる電場をそれぞれ位相  $\exp(ikz_n)$  の電子が感じる。すると、全体の放射光のパワー  $P_{\text{all}}(k)$  は

$$P_{\text{all}}(k) = P_{SR}(k) \left| \sum_{n=1}^N \exp(ikz_n) \right|^2 \quad (2.15)$$

となる。展開すると、次のようになる。

$$P_{\text{all}}(k) = NP_{SR}(k) + \sum_{n \neq m}^N \exp[ik(z_n - z_m)] P_{SR}(k) \quad (2.16)$$

ここで第 2 項は  $n \neq m$  を満たす  $N(N-1)$  個の組み合わせについて和を取るものとする。式 (2.16) の第 1 項は通常のインコヒーレントな放射光、そして第 2 項がコヒーレント放射光強度に相当する。ここで、フォームファク

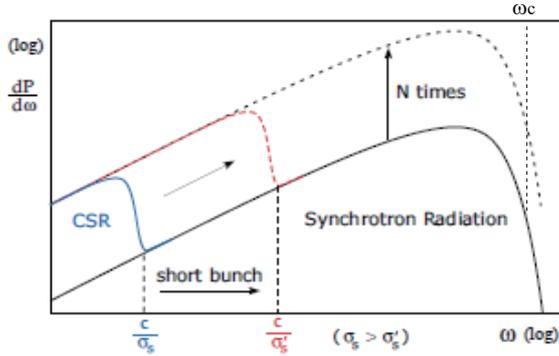


図 2.2: バンチ長による CSR スペクトルの変化。電子数  $N$  の場合、通常の放射光に比べて CSR は  $N$  倍の強度になる。CSR の最短の波長はバンチ長（この図では  $\sigma_s$  となっている）程度である。

ター  $\mathcal{F}(k)$  を定義する。粒子数  $N$  は非常に大きいと仮定し、 $z$  と  $z + dz$  の間に含まれる電子線密度  $\lambda(z)$  を導入して積分表示に変える。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(k) &\equiv \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n \neq m}^N \exp[ik(z_n - z_m)] \\ &= \left[ \int \lambda(z) \exp(ikz) dz \right]^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

ここで、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z) dz = 1 \quad (2.18)$$

である。このフォームファクター  $\mathcal{F}(k)$  を使って、全体の放射光のパワーは次のように表すことができる。

$$P_{\text{all}}(k) = NP_{\text{SR}}(k) + N(N-1)\mathcal{F}(k)P_{\text{SR}}(k) \quad (2.19)$$

$\mathcal{F}(k)$  がコヒーレント放射光の割合を示すパラメーターであることがわかるだろう。  $N$  が十分大きいときは、 $P_{\text{all}}(k) \simeq N^2\mathcal{F}(k)P_{\text{SR}}(k)$  となり、電子数の 2 乗に比例する。通常、バンチ内の電子数は  $10^9 \sim 10^{11}$  であるため、わずかな  $\mathcal{F}(k)$  でも放射光強度が大きく増幅される。

ここで、次のようなバンチ長  $\sigma_z$  のガウス分布の場合

を考えよう。電子線密度  $\lambda(z)$  は次のようになる。

$$\lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right] \quad (2.20)$$

フォームファクターは簡単に計算でき、

$$\mathcal{F}(k) = \exp[-\sigma_z^2 k^2] \quad (2.21)$$

分散が  $1/2\sigma_z^2$  のガウス分布になる。ガウス分布に対しては全体のエネルギー損失  $P_{\text{all}} = \int P_{\text{all}}(k) dk$  についても解析的に解くことができ [6]、

$$P_{\text{all}} = NP_{\text{SR}} + N(N-1)P_{\text{SR}}T\left(\frac{3\sigma_z\gamma^3}{2R\beta}\right) \quad (2.22)$$

となる。ここで、

$$T(a) \equiv \frac{9}{32\sqrt{\pi}a^3} \exp\left(\frac{1}{8a^2}\right) K_{5/6}\left(\frac{1}{8a^2}\right) - \frac{9}{16a^2} \quad (2.23)$$

である。ここで、 $K_{5/6}$  は変形ベッセル関数である。式 (2.22) と (2.23) を用いて、飛行距離  $L$  のバンチ全体のエネルギー変化  $\Delta E$  は次のように近似することができる。

$$\Delta E \approx -N^2 r_e m c^2 \frac{\Gamma(5/6)}{6^{1/3} \sqrt{\pi}} \frac{L}{(R^2 \sigma_z^4)^{1/3}} \quad (2.24)$$

となる。ここで、 $\Gamma(5/6)$  はガンマ関数である。

放射光の角度拡がりについて補足をしよう。ここで、サブ GeV 以上の電子エネルギーでバンチ長がサブピコ秒程度の場合を考える。すると、CSR の波長は短くても波長がバンチ長程度であり、 $c/\omega_c$  よりも十分長く (図 2.2)、インコヒーレントの放射光に比べて放射角度が大きい。式 (2.13) より、バンチ長  $\sigma_z$  程度の波長の CSR の放射角度は次のようになる<sup>3</sup>。

$$\langle \theta_{\text{rad}}^2 \rangle^{1/2} \sim \left(\frac{3\sigma_z}{R}\right)^{1/3} \quad (2.25)$$

通常の放射光によるエネルギー損失とは異なり、コヒーレント放射光によるエネルギー損失は電子のエネルギーではなく、主にバンチ長に依存する。蓄積リングの

<sup>3</sup>くどいようだが、最大エネルギーまで加速する前の低エネルギーのビームダイナミクスを扱う際には、臨界波長がバンチ長よりも長くなる場合があるので注意が必要である。

バンチ長は短い場合でも数ピコ秒であるため [7],[8]、サブ GeV クラスでは CSR の波長は  $c/\omega_c$  に比べて長くエネルギーが低いため無視できる。しかし、低エネルギークラスにおいては、通常の放射光によるエネルギー損失に加えて、CSR によるエネルギー損失が数十倍になるという計算結果が報告されている [9]。

このコヒーレント放射光は東北大学のライナックで世界で初めて観測に成功しており [10]、その後、数多くの蓄積リングも数ピコ秒の短いバンチ長の電子ビームの蓄積に成功し、CSR が観測されたことが報告されている [11][12]。

### 3 CSR の電子バンチに及ぼす影響

バンチからの CSR はどのような影響をビームに与えるのだろうか？2.3 章で、CSR が発生することによってバンチ全体のエネルギーが減少することを述べた。その他に、自ら放射した CSR によって進行方向のエネルギー分布を歪める影響があり、このインピーダンスについて Warnock が解析解を導出した [13]。エネルギー分布の変化はエミッタンスの増加やバンチ長の伸長などを引き起こす原因となるため、ここでは、特に後者のメカニズムや遮蔽効果について説明したい。エネルギー変化を解析的に解く方法はいくつか報告されているが、ここでは Derbenev の方法を紹介する [14], [15]。また、この複雑な問題を数値的に解くためにどのようなシミュレーションコードが開発されているか紹介する。

#### 3.1 Frenet-Serret 座標系の定義

第 2 章ではデカルト座標を使って説明したが、加速器中の電子のように光速に近い速さで運動している粒子を扱う場合は、理想の軌道上を運動する粒子を基準にとる方が物理的な理解を得やすい。その基準粒子の軌道上の位置を  $s$  とし、各粒子の位置は基準粒子からの位置のずれで定義する。図 3.1 に模式図を示す。基準粒子が運動する平面内に水平な方向のずれを  $x$  とし、基準粒子の軌道より外側を正にとる。その平面に垂直な方向のずれを  $y$  と表す。水平方向、垂直方向および進行方向の単

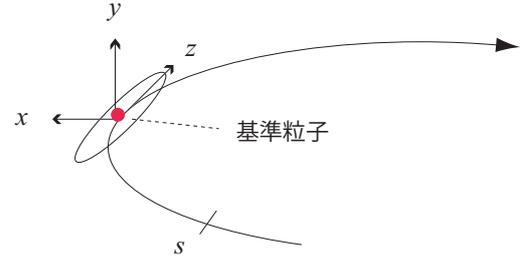


図 3.1: Frenet-Serret 座標系

位ベクトルをそれぞれ  $e_x$ 、 $e_y$  および  $e_s$  と表す。ここで、基準粒子の位置ベクトルを  $r_{ref}$  とすると、各粒子の位置ベクトルは  $r = r_{ref} + xe_x + ye_y$  となり、時間の遅れを  $z = s - c\beta t$  で定義する。このような座標系を Frenet-Serret 座標系と呼ぶ。

#### 3.2 相互作用ハミルトニアンとローレンツ力

電磁場の中を運動する電子のローレンツ変換で不変なハミルトニアン  $\mathcal{H}$  は

$$\mathcal{H} = \sqrt{(c\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2 + m^2c^4} + e\Phi \quad (3.1)$$

ここで、 $\mathbf{P}$  は共役な正準運動量で  $\mathbf{P} \equiv \gamma m(d\mathbf{r}/dt)$  である。電磁場と電子の相互作用を扱うには、式 (3.1) のうち相互作用の部分のみを抜き出せばよい。ローレンツ不変な相互作用ハミルトニアン  $\mathcal{H}_{int}$  は次のようになる。

$$\mathcal{H}_{int} = e(\Phi - \beta \cdot \mathbf{A}) \quad (3.2)$$

次に個々の電子に及ぼす力をローレンツ力  $\mathbf{F}$  を求めよう。

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) \quad (3.3)$$

となる。これをスカラー・ベクトルポテンシャルから導出するには、以下の公式を用いればよい。

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.4)$$

Frenet-Serret 座標系において、 $A$  および  $\nabla$  は次のように定義される。

$$\begin{aligned} A &= A_x e_x + A_y e_y + A_s e_s \\ \nabla &= e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{1+Kx} e_s \frac{\partial}{\partial s} \end{aligned}$$

$K$  は軌道の曲率半径  $R$  の逆数、すなわち  $K \equiv 1/R$  であり、 $e_s$  および  $e_x$  の微分は次のようになる。

$$\frac{de_s}{ds} = -K e_x, \quad \frac{de_x}{ds} = K e_s \quad (3.5)$$

理想的には電子は  $(x, s)$  平面上の軌道をたどるため、 $A_y$  は無視する。すると、

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ E_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \Phi \\ E_s &= -\frac{\partial \Phi}{\partial s} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_s}{\partial t} \\ B_x &= \frac{\partial A_s}{\partial y} \\ B_y &= \frac{1}{1+Kx} \frac{\partial A_x}{\partial s} - \frac{\partial A_s}{\partial x} - \frac{K}{1+Kx} A_s \\ B_s &= -\frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.6)$$

ここで式 (3.2) の相互作用ハミルトニアン  $\mathcal{H}_{int}$  を用いてローレンツ力を求めると、

$$\begin{aligned} F_y &= -e \frac{\partial}{\partial y} (\Phi - \beta_s A_s) = -\frac{\partial \mathcal{H}_{int}}{\partial y} \\ F_x &= -\frac{\partial \mathcal{H}_{int}}{\partial x} - e \frac{dA_x}{cdt} + e \frac{KA_s}{1+Kx} \\ \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{int}}{\partial t} - e \frac{d\Phi}{dt} \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる。これらの式は微小な項を無視することによって、

$$F_y \approx -\frac{\partial \mathcal{H}_{int}}{\partial y}, \quad F_x \approx -\frac{\partial \mathcal{H}_{int}}{\partial x}, \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx \frac{\partial \mathcal{H}_{int}}{\partial t} \quad (3.8)$$

とすることができる<sup>4</sup>。

<sup>4</sup>式 (3.7) の  $F_x$  の 3 項目、 $eKA_s/1+Kx$  は Talman 効果として知られており、式 (3.17) の  $F_0$  を打ち消すと言われている。本論で後ほど議論するビームダイナミクスにはほとんど影響を与えないので、注釈するにとどめる。

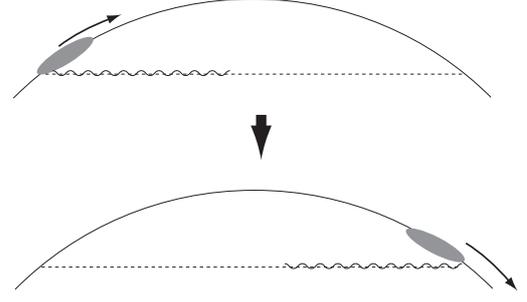


図 3.2: バンチ後部から発生した CSR がバンチ前方に与える影響の模式図

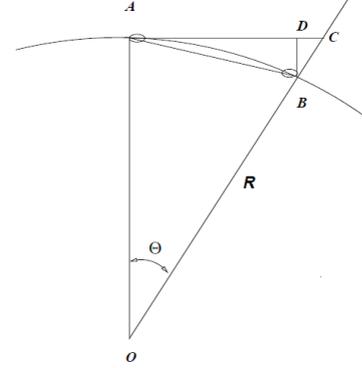


図 3.3: 遅延距離の模式図

### 3.3 CSR の影響によるエネルギー分布と軌道の変化

サブピコ秒程度のバンチ長から出る CSR の放射角度は式 (2.25) で示したように広い範囲にわたるため、CSR の一部は図 3.2 に示したような光路を辿り、曲線を描くバンチに追いつく。その結果、バンチ内の電子が感じる電磁場は直線運動の場合と異なり、これがエネルギー分布や軌道の変化を引き起こす。本章では、スカラー・ポテンシャル  $\Phi$  およびベクトル・ポテンシャル  $A$  から電磁場を求め、バンチに及ぼすローレンツ力やエネルギー分布の変化について解析解を導出する。

図 3.3 の中で曲線  $AB$  がバンチの軌道、直線  $AB$  が CSR の進路である。軌道の曲率半径  $R$  で偏向角度  $\theta$  が 1 より十分小さい場合、点  $B$  におけるバンチと CSR の

光路差  $\tilde{z}$  は次のように近似できる。

$$\tilde{z} = \widehat{AB} - |AB| = R\Theta - 2R \sin(\Theta/2) \approx \frac{\Theta^3 R}{24} \quad (3.9)$$

これは、電子が B にたどり着いたとき、 $\tilde{z}$  だけ後方にある電子の CSR の影響を受けることを意味する。

2.1 章の結果を用いて、この場合の Liénard-Wiechert ポテンシャルを求めよう。ここでは、バンチの横方向の広がり  $\sigma_{\perp}$  はバンチ長  $\sigma_z$  に比べて十分小さく、チャンパーによる遮蔽効果がない場合を考える<sup>5</sup>。この条件を式に書き下すと、

$$\sigma_z \gg \sigma_{\perp} \sqrt{\sigma_{\perp}/R} \quad (3.10)$$

$$\sigma_z \ll h \sqrt{h/R} \quad (3.11)$$

ここで、 $h$  はチャンパーの断面のサイズである。式 (3.10) の右辺は  $x = \sigma_{\perp}$  と  $-\sigma_{\perp}$  からの CSR の光路長の差、式 (3.11) は直接届いた CSR と反射した CSR の光路長の差である。ここで、新しい変数  $\tau$  を

$$\tau = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c \quad (3.12)$$

と導入すると、式 (2.4) は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &= \int d\mathbf{r}_0 \frac{\rho(\mathbf{r}_0, t - \tau)}{c\tau}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \int d\mathbf{r}_0 \frac{\beta\rho(\mathbf{r}_0, t - \tau)}{c\tau} \end{aligned}$$

軌道の曲率半径  $R$  が一定であるときは、新しい変数  $\xi \equiv s - s_0$  を導入して、次のように表すことができる。

$$c\tau = \left[ (R+x)^2 + (R+x_0)^2 - 2(R+x)(R+x_0) \cos \frac{\xi}{R} + (y-y_0)^2 \right]^{1/2} \quad (3.14)$$

変数  $\xi$  で書き直すと、次の式が得られる。

$$c\tau \approx \left| \xi - \frac{\xi^3}{24R^2} + \frac{\xi}{2R}(x+x_0) + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2\xi} \right| \quad (3.15)$$

<sup>5</sup>遮蔽効果とは、チャンパーの反射によって CSR の影響が打ち消される現象である。詳しくは 3.5 章で説明する。

3.2 章の結果より、ここで  $x_0 = 0$ 、 $y_0 = 0$  における相互作用ハミルトニアン  $\mathcal{H}_{int}$  を求めよう。ここで、 $\xi < 0$  の積分、 $\gamma^{-2}$  に比例するクーロン場は無視する。すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{int}(x, y, s, t) &= Nr_e mc^2 \int_0^{\infty} \frac{\xi d\xi}{2R^2} \left[ 1 - \left( \frac{\xi}{2R}x + \frac{x^2 + y^2}{2\xi} \right) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{4R^2} x^2 \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right] \lambda \left( s - \beta ct - \frac{\xi^3}{24R^2} \right) \end{aligned}$$

ここで、3次元の電子分布  $\rho(z)$  を線密度分布  $\lambda(z)$  で近似した。 $\int \lambda(z) dz = 1$  である。式 (3.9) より  $\tilde{z} = \xi^3/24R^2$  であり、Frenet-Serret 座標系の定義より、 $z = s - c\beta t$ 、 $d\xi = ds = (1+K)dz$  である。最後の項の 2 階偏微分を部分積分で 1 階偏微分にして計算すると、相互ハミルトニアン  $\mathcal{H}_{int}(x, y, z, t)$  が以下のように求まる。

$$\mathcal{H}_{int} = U(z)(1+Kx) - F_0(z)x + \frac{1}{2}g(z)(3x^2 + y^2) \quad (3.16)$$

すると、

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{2Nr_e mc^2}{(3R^2)^{1/3}} \int_0^{\infty} \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}^{1/3}} \lambda(z - \tilde{z}) \\ F_0(z) &= -\frac{2Nr_e mc^2}{R} \lambda(z) \\ g(z) &= \frac{Nr_e mc^2}{(3R^2)^{2/3}} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\infty} \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}^{2/3}} \lambda(z - \tilde{z}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

式 (3.8) および式 (3.17) を代入してエネルギー変化、水平・垂直方向のローレンツ力について最終的な式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{ds} &= \frac{d\mathcal{E}(z)}{cdt} = -\frac{\partial}{\partial z} U(z) \\ F_x(z) &= F_0(z) - 3g(z)x \\ F_y(z) &= -g(z)y \end{aligned} \quad (3.18)$$

$\partial U(z)/\partial z$  はエネルギー変化、 $F_0(z)$  は水平方向の収束力、 $g(z)$  は水平・垂直方向の多次元の収束力が新たに加えられることを意味する。この進行方向の wake 関数  $\mathcal{W}'_0(z)$  を

$$\frac{d\mathcal{E}}{ds} = Nr_e mc^2 \int_{-\infty}^z \mathcal{W}'_0(z - z') \lambda(z') dz' \quad (3.19)$$

と定義すると、CSR の wake 関数については

$$W'_0(z) = -\frac{2}{(3R^2)^{1/3}} \frac{1}{z^{1/3}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.20)$$

となる。

ここで、全体のエネルギー変化量およびエネルギー変化量の拡がりを求めることは有用である。式 (3.19) の  $d\mathcal{E}/ds$  を  $z$  について積分すると、全体のエネルギー変化  $P_{\text{CSR}}$  を得ることができる。

$$\begin{aligned} P_{\text{CSR}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathcal{E}(z)}{cdt} \lambda(z) dz \\ &= -\frac{2Nr_e mc^2}{3^{4/3} R^{2/3}} \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^{4/3}} [\Lambda(0) - \Lambda(\zeta)] \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\Lambda(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \lambda(z) \lambda(z - \zeta)$$

フーリエ変換することによって積分表示は簡単にすることができ、

$$P_{\text{CSR}} = -\frac{8\pi C_o N^2 r_e mc^2}{3^{4/3} R^{2/3}} \int_0^{\infty} |\lambda(k)|^2 k^{1/3} dk \quad (3.22)$$

ここで、 $\lambda(k)$  は  $\lambda(z)$  のフーリエ関数であり、

$$\lambda(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z) e^{-ikz} dz \quad (3.23)$$

である。式 (3.22) の導出には次の公式を用いた。

$$C_o = \int_0^{\infty} (1 - \cos \zeta) \zeta^{-4/3} d\zeta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Gamma(2/3) \quad (3.24)$$

エネルギー変化量の広がり  $\sigma_{P_{\text{CSR}}}$  は次の式で得ることができる。

$$\begin{aligned} \sigma_{P_{\text{CSR}}}^2 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d\mathcal{E}(z)}{cdt} \right)^2 \lambda(z) dz \\ &\quad - \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathcal{E}(z)}{cdt} \lambda(z) dz \right)^2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

電荷線密度分布が分散  $\sigma_z^2$  のガウシアン分布であるバンチについて具体的な関数を求めよう。 $\lambda(z)$  は次の様にと与えられたとする。

$$\lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp(-z^2/2\sigma_z^2) \quad (3.26)$$

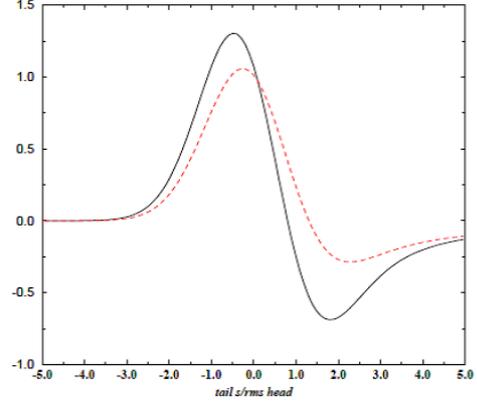


図 3.4: ガウシアン分布の電荷線密度を持つバンチに対するエネルギー変化 (実線) の関数  $I_0(z)$  と水平・垂直方向のローレンツ力 (点線) の関数  $I_1(z)$ 。横軸はバンチ長で規格化  $z/\sigma_z$  しており、右側が前方に当たる。

式 (3.17) と (3.18) より、エネルギー変化および水平・垂直方向の摂動は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{ds} &= -\frac{2Nr_e mc^2}{\sqrt{2\pi}(3R^2\sigma_z^4)^{1/3}} I_0(z/\sigma_z) \\ F_x(z) &= -\frac{2Nr_e mc^2}{R} \lambda(z) \\ &\quad - x \frac{3Nr_e mc^2}{\sqrt{2\pi}(9R^4\sigma_z^5)^{1/3}} I_1(z/\sigma_z) \\ F_y(z) &= -y \frac{Nr_e mc^2}{\sqrt{2\pi}(9R^4\sigma_z^5)^{1/3}} I_1(z/\sigma_z) \end{aligned} \quad (3.27)$$

式 (3.27) に現れる  $I_0(x)$  および  $I_1(x)$  についてプロットしたものが図 3.4 である。 $I_0(x)$  のプロファイルから、バンチ前方の電子でエネルギーが増加する一方で、バンチ中央付近で大きなエネルギー損失があることが分かる。水平・垂直方向の摂動の向きは  $I_1(x)$  で示されているが、エネルギー変化と同様に、バンチ前方と中心から後方にかけて逆方向の影響を与えることが分かる。 $I_0(x)$  および  $I_1(x)$  の詳しい積分表示は以下のようになる。

$$\begin{aligned} I_0(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{dx'}{(x-x')^{1/3}} \frac{\partial}{\partial x'} e^{-x'^2/2} \\ I_1(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{dx'}{(x-x')^{2/3}} \frac{\partial}{\partial x'} e^{-x'^2/2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

バンチ全体のエネルギーの変化量は式 (3.22) より次のようになり、減少していることが分かる。

$$P_{\text{CSR}} = -\frac{N^2 r_e m c^2 2^{4/3} 3^{1/6} [\Gamma(2/3)]^2}{R^{2/3} \sigma_z^{4/3} \pi} \quad (3.29)$$

これは、別に導出した式 (2.24) とほぼ一致する。ここで、偏向電磁石の長さを  $L$  としたとき、エネルギー変化量の広がり  $\sigma_{P_{\text{CSR}}}$  は式 (3.25) を用いると、

$$\begin{aligned} \sigma_{P_{\text{CSR}}} &= \frac{2N r_e m c^2}{3^{1/3} \sqrt{2\pi} (R \sigma_z^2)^{2/3}} \sqrt{\langle I_0^2 \rangle - \langle I_0 \rangle^2} \\ &\approx 0.22 \frac{N r_e m c^2 L^{2/3}}{R \sigma_z^2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

となる。

### 3.4 偏向電磁石の端における CSR の影響

これまで、バンチが常に同じ偏向電磁石の磁場を受ける場合、CSR の影響が常に一定である定常状態について考えてきた。しかし、偏向電磁石の長さは有限であることから、CSR の影響によるエネルギー変化は時間とともに変化する。もし、偏向電磁石の外側が直線部であれば、式 (3.9) に相当する飛行距離の差は小さくなるからである。この過渡状態 (transient effect) と呼ばれる解析解 [16]、[17] が、多くの計算コードでも取り入れられている。

簡単のために、最初は 2 粒子モデルを考える。図 3.5 で電子の進行方向は右向きであり、点  $P (= s)$  とその後方の点  $P_0 (= s_0)$  に電子がある場合を考える。偏向電磁石の入口および出口はそれぞれ  $A (= s_A)$  および  $B (= s_B)$  とすると、点  $P$  と点  $P_0$  の位置関係によって次のように場合分けができる。

- (A) :  $s_0 < s_A, s_A < s < s_B$
- (B) :  $s_A < s_0 < s_B, s_A < s < s_B$
- (C) :  $s_0 < s_A, s_B < s$
- (D) :  $s_A < s_0 < s_B, s_B < s$

領域 (A) の影響は厳密には CSR ではない。直進する電子から CSR が発生せず、通常  $\gamma^2 \gg 1$  の高エネルギーではクーロン場も無視できる。しかし、前方の電子が偏向

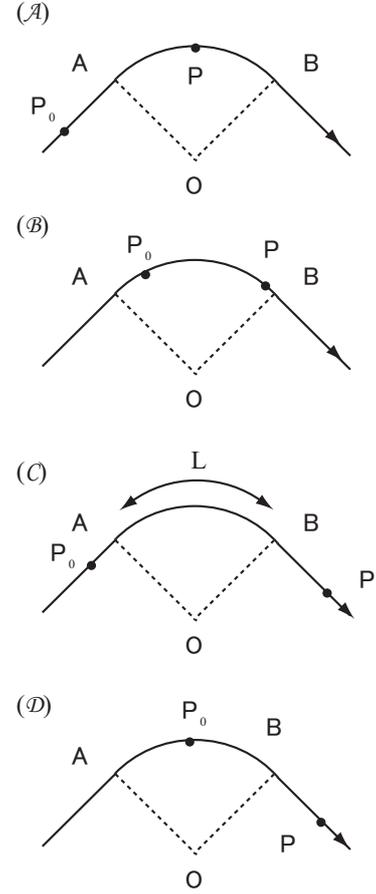


図 3.5: 偏向電磁石と 2 つの電子の位置。電子の進行方向は右向きであり、 $P$  および  $P_0$  はそれぞれ前方と後方の電子の位置を示す。(A) :  $P_0$  が直線部に残り、 $P$  が偏向電磁石内にある場合。(B) :  $P_0$  および  $P$  が同じ偏向電磁石内にある場合。(C) :  $P_0$  が偏向電磁石より手前の直線部にあり、 $P$  が偏向電磁石の後の直線部にある場合。(D) :  $P_0$  が偏向電磁石内に残り、 $P$  が直線部にある場合。

軌道に入った場合は、短い距離で追いつくため式 (2.8) で示したクーロン場の影響が無視できなくなるほど大きくなる。領域 (B) は両方とも偏向電磁石内にある場合で、これまでと同じ条件である。領域 (C) は 2 つの電子が偏向電磁石を挟んだ直線部にある状態である。領域 (D) は偏向電磁石内からの CSR が直線部に進んだ電子に与える場合である。

ここで、3.3 章と同じように変数  $\xi = s - s_0$ 、 $\tilde{z} = \xi^3/24R^2$  を導入する。電磁石入口からの距離に対しても  $\xi_A = s - s_A$ 、 $\tilde{z}_A = \xi_A^3/24R^2$  と定義し、出口からの距離は  $\xi_B = s - s_B$  と定義する。

まず、偏向電磁石の入り口付近の影響について考えよう。領域 (A) および (B) の wake 関数  $W'_0(z)$  は、それぞれ次のように近似することができる。

$$(A) : W'_0(z) = -\frac{2}{(3R^2)^{1/3}} \frac{1}{\tilde{z}_A^{1/3}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.31)$$

$$(B) : W'_0(z) = -\frac{2}{(3R^2)^{1/3}} \frac{1}{z^{1/3}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.32)$$

(A) では (B) の  $z$  を  $\tilde{z}_A$  と置き換えて近似する。

ここで、任意の線密度分布  $\lambda(z)$  に対して  $d\mathcal{E}/ds$  を求めよう。すべての電子について積分して求めるにはいくつか注意しなければならない点がある。ひとつは (A) の近似が成り立つ点  $P_0$  の位置が限られていることである。A 点からの距離が長すぎると、式 (3.31) の近似式が成立しない。もうひとつは遅延時間が存在することである。例えば、ある時間において (B) の状態であったとする。点  $P$  が感じる CSR は遅延距離  $\tilde{z}_A$  だけ前に点  $P_0$  から放射された CSR である。その時に、点  $P_0$  が直線部にあった場合は (A) の wake 関数を適用する。このようにして、各領域の  $d\mathcal{E}/ds$  は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathcal{E}}{ds}\right)_{ent} &= \frac{2Nr_e mc^2}{(3R^2)^{1/3}} \left[ \int_{z-4\tilde{z}_A}^{z-\tilde{z}_A} \frac{dz'}{\tilde{z}_A^{1/3}} \frac{\partial}{\partial z'} \lambda(z') \right. \\ &\quad \left. + \int_{z-\tilde{z}_A}^z \frac{dz'}{(z-z')^{1/3}} \frac{\partial}{\partial z'} \lambda(z') \right] \\ &= \frac{2Nr_e mc^2}{(3R^2)^{1/3}} \left[ \frac{\lambda(z-\tilde{z}_A)}{\tilde{z}_A^{1/3}} - \frac{\lambda(z-4\tilde{z}_A)}{\tilde{z}_A^{1/3}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{z-\tilde{z}_A}^z \frac{dz'}{(z-z')^{1/3}} \frac{\partial}{\partial z'} \lambda(z') \right] \quad (3.33) \end{aligned}$$

となる。偏向電磁石が無限に続いている場合、つまり  $\xi_A = \infty$  のときは、式 (3.33) は式 (3.19) および (3.20) と一致する。

出口付近の影響は複雑であるため、結果のみを示そう。

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathcal{E}}{ds}\right)_{exit} &= 4Nr_e mc^2 \left[ \frac{\lambda(z-\xi_1(L))}{L+2\xi_B} - \frac{\lambda(z-4\xi_2(L))}{L+2\xi_B} \right. \\ &\quad \left. + \int_{z-\xi_1(L)}^z \frac{dz'}{\zeta'+2\xi_B} \frac{\partial}{\partial z'} \lambda(z') \right] \quad (3.34) \end{aligned}$$

と計算することができ、ここで  $\xi_1$  および  $\xi_2$  は

$$\xi_1(\zeta) \equiv \frac{\zeta^3}{24R^2} \frac{\zeta+4\xi_B}{\zeta+\xi_B}, \quad \xi_2(\zeta) \equiv \frac{\zeta^2}{24R^2} (\zeta+3\xi_B) \quad (3.35)$$

と定義される関数である。 $\zeta'$  は次の 4 次方程式の解である。

$$\xi_1(\zeta') = z - z' \quad (3.36)$$

式 (3.34) の積分で、 $z' = z - \xi_1(\zeta')$  と変数を変換して積分すると次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathcal{E}}{ds}\right)_{exit} &= 4Nr_e mc^2 \left[ \frac{\lambda(z-\xi_1(L))}{L+2\xi_B} - \frac{\lambda(z-4\xi_2(L))}{L+2\xi_B} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^L \frac{d\zeta'}{\zeta'+2\xi_B} \frac{d\xi_1(\zeta')}{d\zeta'} \frac{\partial}{\partial z} \lambda(z-\xi_1(\zeta')) \right] \quad (3.37) \end{aligned}$$

すると、式 (3.35) の  $\xi_1$  について 4 次方程式を解く必要がなくなり、数値計算が容易になる。

式 (3.33) と式 (3.37) のプロファイルを図 3.6 と 3.7 に示す。入口付近の過渡状態では、距離が長くなるにつれ、エネルギーが増加する部分がバンチ前方に進み、やがて定常状態になる。出口付近では距離とともに徐々に wake ポテンシャルが小さくなる。しかし、出口から 50 cm 先でも CSR の影響が残っていることがわかる。

図 (3.8) にエネルギー変化量の推移をプロットした。エネルギー変化量のバンチ全体にわたる平均値  $\langle \Delta E \rangle$  およびその標準偏差  $\langle (\Delta E - \langle \Delta E \rangle)^2 \rangle^{1/2}$  を載せる。偏向電磁石を通過した後もエネルギーは減少し続け、エネルギー広がりが大きくなっていくことがわかる。

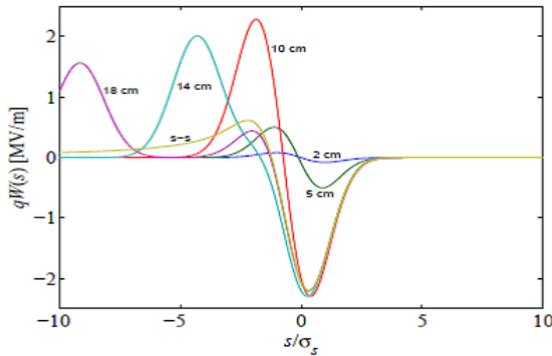


図 3.6: 偏向電磁石の入口付近における CSR のポテンシャル。図中の  $s-s$  は定常状態を表し、入口からの距離ごとにプロットしている。図 3.4 と横軸の向きが異なり、左側がバンチ先頭になる。負の符号がエネルギー損失に当たる。バンチあたりの電荷量は 1 nC、軌道の曲率半径  $R$  は 1.5 m、バンチ長  $\sigma_z$  は  $50\mu\text{m}$  である。

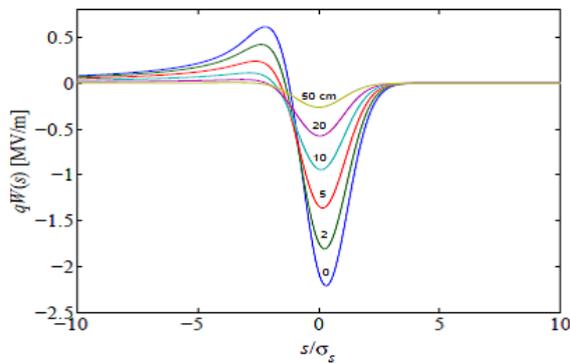


図 3.7: 偏向電磁石の出口付近における CSR のポテンシャル。出口からの距離ごとにプロットしている。図 3.4 と横軸の向きが異なり、左側がバンチ先頭になる。負の符号がエネルギー損失に当たる。バンチあたりの電荷量は 1 nC、軌道の曲率半径  $R$  は 1.5 m、バンチ長  $\sigma_z$  は  $50\mu\text{m}$  である。

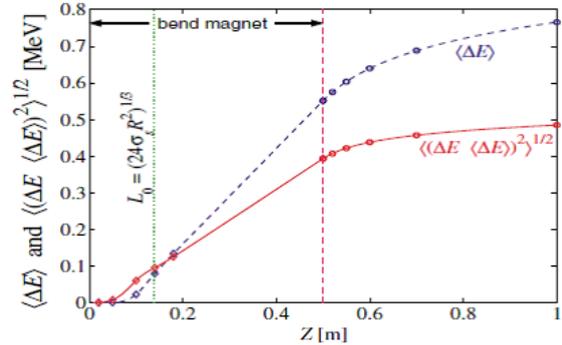


図 3.8:  $Z=1$  で上になっているグラフがエネルギー損失  $\langle \Delta E \rangle$ 、下のグラフがエネルギー広がり  $\langle (\Delta E - \langle \Delta E \rangle)^2 \rangle^{1/2}$  の推移。50 cm の偏向磁石とその後に続く直線部に沿ってプロットした。および は図 3.6 および図 3.7 に対応する。

この過渡状態が定常状態に比べて非常に短い場合、つまり偏向電磁石の両端の飛行距離の差がバンチ長よりも非常に長い場合  $L^3/24R^2 \gg \sigma_z$  であるときはほとんど定常状態と同じとみなして構わない。

### 3.5 チャンバーによる遮蔽効果

CSR の影響を抑えるメカニズムにはチャンバーによる遮蔽効果がある。CSR の影響によるエミッタンスの増加やバンチ長の伸長を抑える対策として、いくつかのラティスデザインの最適化が提案されているが (第 4 章)、一番効果があるとされているこのチャンバーによる遮蔽効果である。ここでは、最も基本的な無限平行平板による遮蔽についてまとめた。

バンチから発生した CSR は、直進するだけでなくチャンバーの表面で反射する。もし、チャンバー表面がビームに近いところにある場合、反射した CSR によって、バンチに与える影響はさらに複雑なものとなる。チャンバー表面では固定端反射によって CSR の位相が反転するため、反射した CSR と直進した CSR の光路長が十分小さい場合は、CSR の影響を打ち消すことになる。この現象を遮蔽効果と呼ぶ。しかし、わずかな反射 CSR

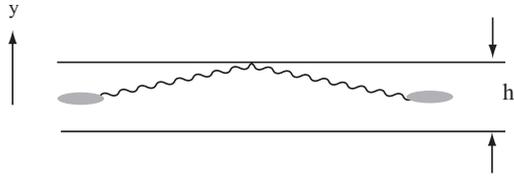


図 3.9: 反射する CSR。Frenet-Serret 座標系の  $z$ - $y$  平面を图示したものであり、電子は紙面と垂直方向の加速を受ける。

の遅れによって CSR の影響を完全に打ち消すことは困難である。

さて、バンチの軌道に対して高さ  $\pm h/2$  に無限に続く完全導体の平面があると (図 3.9)、CSR はその表面で固定端反射する。高さ  $h$  が十分小さい時は、反射した CSR が弧を描く電子に追いつく。ここで、遮蔽効果が表れる  $h$  の最大値を大雑把に求めよう。直進した最後尾からの CSR がバンチの先頭に追いつくときに、反射した CSR がバンチの後尾に追いつくことが必要条件である。反射した CSR とバンチの飛行距離の差  $\tilde{z}_1$  は図 3.3 から

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1 &= \widehat{AB} - \sqrt{|AB|^2 + (h)^2} \\ &\approx \widehat{AB} - \left( |AB| + \frac{1}{2} \frac{h^2}{|AB|} \right) \\ &\approx \widehat{AB} - |AB| - \frac{1}{2} \frac{h^2}{\widehat{AB}}\end{aligned}\quad (3.38)$$

ここで、必要条件  $\widehat{AB} - |AB| = \sigma_z$  および  $\tilde{z}_1 = 0$  を満たす高さ  $h$  は、式 (3.9) の定義を用いて次のように得ることができる。

$$h = 2(3\sigma_z^4 R^2)^{1/6} \quad (3.39)$$

バンチ長や軌道の曲率半径が長いほど、遮蔽効果が期待できることがわかる。ここで、5 GeV のと 200 MeV ERL について、 $h$  の最大値を求めよう。軌道の曲率半径が 20 m および 1 m であるので、バンチ長 0.3 mm のバンチでは、それぞれ 3 cm および 1 cm となる。バンチ長が 0.03 mm

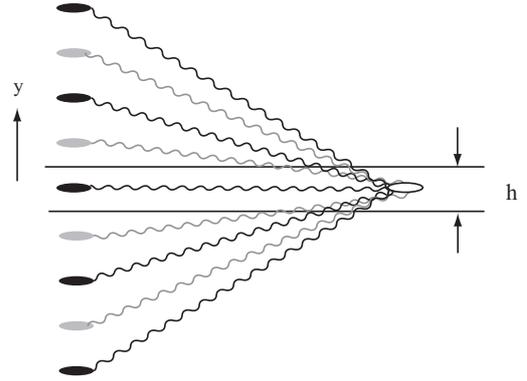


図 3.10: 鏡像電荷による遮蔽効果の計算モデル。青い丸は赤い丸と符号が反対の鏡像電荷を意味する。

と短い場合では、それぞれ 6 mm および 2 mm となり、条件が厳しくなる。

次は遮蔽による電磁場について述べる。導体平面の電場  $E$  の接線成分がゼロになるような境界条件にするために、図 3.10 のように鏡像電荷を無限に配置する方法が多く使われている。この状態のグリーン関数を式 (2.3) に倣って書き下すと、次のようになる。

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - k h \mathbf{e}_y|/c - (t - t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - k h \mathbf{e}_y|} \quad (3.40)$$

式 (3.40) を 3.3 章と同じように展開してエネルギー変化を求めることもできるが、非常に困難であるため、インピーダンスを使った解析解を紹介する [13],[19],[20],[21]。これまでと同じように進行方向の 1 次元のみを扱う。単位長さ当たりのインピーダンス  $Z(k)$  は wake 関数のフーリエ変換で定義される。

$$cZ(k) = \int dz W'(z) \exp(-ikz) \quad (3.41)$$

Maxwell 方程式を用いたインピーダンスの導出については補遺に詳細を載せたので参考にしてほしい。ここでは、その結果の一部を挙げる。興味があるのは  $h \rightarrow 0$  におけるインピーダンス  $Z(k)$  の漸近解である。これは次

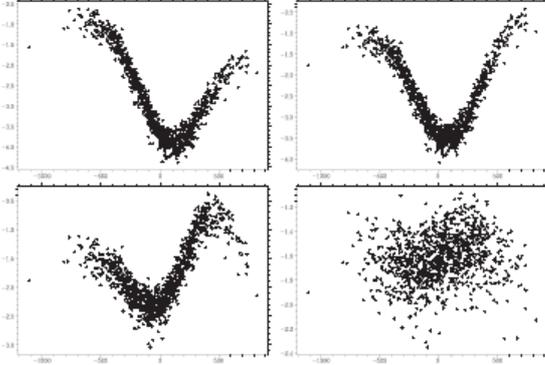


図 3.11: CSR による  $(z, \Delta E)$  分布の麗。パンチ長  $\sigma_z$  は 0.3 m、エネルギーは 5 GeV、パンチ当たりの電荷量は 1 nC である。チャンバーの高さ  $h$  がそれぞれ  $h = \infty$  (自由空間、左上)、4 cm (右上)、2 cm (左下)、1 cm (右下) である。横軸と縦軸の単位はそれぞれ  $\mu\text{m}$  および MeV である。

のようになる。

$$Z(k) = \frac{\pi Z_0}{kh^2} \left[ e^{-2\pi^3 R/3k^2 h^3} - \frac{3i}{2} C_5 \left( \frac{k^2 h^3}{\pi^3 R} \right)^2 \right]$$

$$C_5 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^5} = 1.004524 \quad (3.42)$$

式 (3.42) の実部は、 $h$  が小さくなると  $\exp(-h^{-3})$  の項によって急速にゼロに近くなる。一方で、 $Z(k)$  の虚数部は  $h^4$  に比例する。 $h$  が小さくなるとゼロに近くなるが、実部に比べて遮蔽が効きにくい。

また、シールドがない自由空間、つまり  $h \rightarrow \infty$  では

$$Z(k) = \frac{Z_0}{4\pi} \frac{2\Gamma(2/3)}{3^{1/3}} \frac{(ik+0)^{1/3}}{R^{2/3}} \quad (3.43)$$

この式は、式 (3.20) をフーリエ変換して  $-Nr_e mc^2 \lambda(k)$  で割ったものになる。

ここで、図 3.11 に計算結果を示す。 $R=20$  mm、パンチ長 0.3 mm で  $h$  の最大値が 3 cm と見積もったが、遮蔽効果が顕著になるのは  $h$  が 1 cm 以下であることが分かる。

### 3.6 様々なシミュレーションコード

CSR の数値計算のための様々な計算コードが開発・公開されているので、ここで紹介したい [22]。できる限り元の論文に忠実に説明するが、本テキストで変数を統一するために、若干変更している箇所があるので、ご了承ください。

- 2次元プログラム (名称未定) - R. Li

ビームラインに沿って進行する電子による Lienard-Wiechert ポテンシャルから得られる電磁場の履歴を残して、CSR の影響を計算する方法である。これまでのコードでは、理想軌道上の電子による電磁場を残しており、CSR の影響によって摂動を受けた電子の履歴を残していなかった。このような矛盾をなくす (self-consistent) ために、電子の作る電磁場をそのつど再計算する方法を最初に導入したコードである。Maxwell の微分方程式をリープ・フロッグ法 (leap-frog) を用いて解くことにより、各時間に対応する電磁場の履歴を計算している。垂直方向の力学を無視しており、進行方向と水平方向の 2次元のみを考えている。パンチ形状は進行方向と水平方向にガウシアン分布を持つディスク状の組み合わせで近似する。

- TraFiC<sup>4</sup> - A. Kabelら

大きな特徴はビームラインに沿って進行する電子の放射による電磁場の履歴を 3次元上で完全に保存することにある。最新バージョンでは、R.Li のコードと同じように摂動を受けた電子の履歴を残して、因果律を満たしている。疑似電荷を並列する手法で、平行平板の遮蔽効果を取り込むことも可能である。1D コードよりも詳細で正確な情報が得られる一方、計算に必要な時間、CPU、履歴の保存領域が大きくなるという欠点がある。計算時間短縮のためにガウシアン分布のマクロ粒子の使用、履歴の時間間隔とメッシュの切り方の最適化、並列計算など様々な工夫をしている。

- CSRtrack - M.Dohlus and T. Limberg

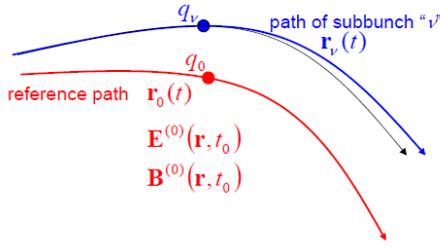


図 3.12: 疑似グリーン関数の模式図

TraFiC<sup>4</sup> の最大の欠点は計算時間のパフォーマンスにある。それを改善するために、TraFiC<sup>4</sup> を元に CSR の場の計算アルゴリズムを改良したものが CSRtrack である。1 次元近似や疑似グリーン関数などを使用したアルゴリズムを選ぶことができる。

1 次元近似では電場  $E(z, t)$  の進行方向の成分が放射場の関数  $K(z, u)$  と縦方向の電荷分布  $\lambda(z, t)$  と以下に示す畳みこみ積分で近似できるものとする。

$$E(z, t) = \int \frac{\partial \lambda(u + z - vt)}{\partial u} K(z, u) du \quad (3.44)$$

これより、既知の関数  $K(s, u)$  から高速フーリエ変換 (FFT) で求める方法である。非常に計算時間が短い一方、放射場の影響を低く見積もってしまう場合もある様である。

疑似グリーン関数の方法では垂直方向が無視されており、事実上 2 次元である。マクロ電子 (sub-bunch) の軌跡  $r_\nu(t)$  は基準粒子の軌跡  $r_0(t)$  を用いて次のように近似されている。

$$r_\nu \approx r(t_0) + R \cdot (r_0(t) - r_0(t_0)) \quad (3.45)$$

ここで  $R$  は偏移・回転の推移を表すパラメーターである。各電子の電場  $E^{(\nu)}(r, t_0)$  は基準粒子の電場  $E^{(0)}(r, t_0)$  を用いて

$$\begin{aligned} E^{(\nu)}(r, t_0) &\approx \frac{q_\nu}{q_0} R \cdot E^{(0)}(r_0(t_0) + R^{-1}(r - r_\nu(t_0)), t_0) \end{aligned} \quad (3.46)$$

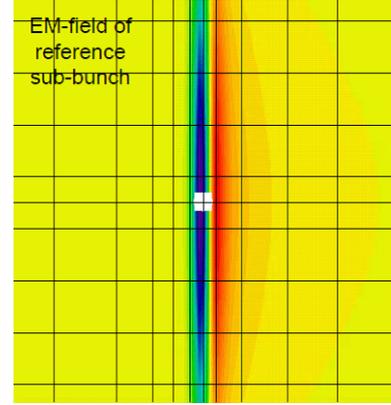


図 3.13: メッシュの作成

と近似する。磁場  $B^{(\nu)}$  も同様に扱う。この模式図を図 3.12 に載せる。この疑似グリーン関数はメッシュで区切られた 2 次元平面上で計算し、これらを補間することによって放射場を計算する。(図 3.13) メッシュの取り方によって計算時間を大幅に短縮でき、通常の 3 次元の計算に比べて 100 倍以上も計算効率が高くなる場合もある。

- TREDI - L. Giannessi and M. Quattromini

Lienard-Wiechert ポテンシャルでモンテカルロ法 (Monte-Carlo method) をベースとして粒子追跡するコードである。一般的にモンテカルロ法とは、解析解を求めることが困難な場合に、多数発生させた一様乱数を使用して近似解を求める手法のことを指す。TREDI では粒子 (電子) を指定した分布で発生させるために一様乱数を用い、個々の電子を追跡してビーム力学をシミュレーションする。この方法は応用範囲が広く、3.3 章で切り離して考えたクーロンポテンシャルの項、つまり空間電荷効果、も同時に取り入れて計算することが可能である。それは、TREDI では元来、電子銃周りの低エネルギーの電子の 3 次元追跡を目的としたものであったため、低エネルギー領域で顕著になる空間電荷効果を外すことができなかったためである。

- elegant - M. Borland

elegant はラティスデザインのために開発された粒子追跡 (トラッキング) コードであり、オプションとして CSR の効果を取り入れた計算ができるように開発され [23]、進行方向のエネルギー分布の変化によって引き起こされるビームダイナミクスを計算する。比較的シンプルなアルゴリズムであり、すでに計算コードが確立している。計算時間が速く、新しい計算コードを開発するためのベンチマークの基準としても用いられる。

CSR に対する計算ステップは次のようになる。

1. 偏向電磁石を 100 個程度の区分 (パーツ) に細分化する。
2. CSR が無い状態でパーツ出口のパンチの分布を計算する。
3. 出口において、CSR によるエネルギー分布の変化を反映させる。
4. 次のパーツに進み、2 から繰り返す。偏向電磁石の出口まで続ける。

ステップ 1 の 100 個という数はあくまでも目安であり、個別に変更することができる。ステップ 2 では乱数を使って発生させた各マクロ粒子の運動方程式を積分し、パーツ出口のパンチの分布を推定する。追跡した電子はピンと呼ばれるパラメータで区切られた区画に格納される。電子数が少ない場合、ピンの数が多すぎる場合はノイズが入りやすいため、Savitzky-Golay フィルターと呼ばれるフィルターを用いて高速フーリエ変換を施し、ノイズに対応する高周波数成分を落としてスムージングを行う。ステップ 3 では式 (3.19) および (3.20) からエネルギー分布の変化を導出し記録する。この際、水平・垂直方向への蹴りは無視している。また、過渡状態も式 (3.33) と (3.37) を用いて取り入れている。ステップ 4 の計算では、前のパーツでの CSR によるエネルギー分布の変化がパンチの分布に反映される。各電子のエネルギー変化による軌道の変化、その結果起こるエミッタンス増加などの影響を推定することができる。

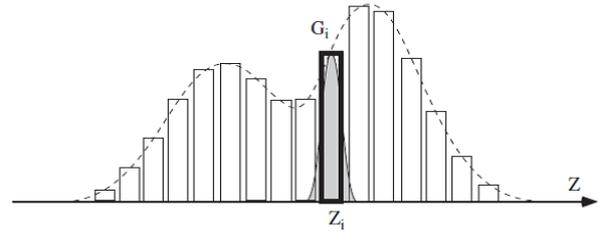


図 3.14: ガウシアン分布の重ね合わせによるパンチ形状の近似

スムージングをすることによって、ノイズではない鋭い波形が潰される可能性があるのが欠点のひとつである。このことによって、続く偏向電磁石の CSR を少なく見積もってしまう恐れがある。

- 近軸光線近似による CSR コード - 吾郷智紀&横谷馨

これまでの計算コードとの大きな違いは Maxwell 方程式をフーリエ変換を施し、周波数成分で扱うことにある [20],[21]。従来の遮蔽効果の計算では、平行平板の場合しか扱うことができなかったが、メッシュで区切ることができるあらゆるチャンパーの形において遮蔽効果を計算できるのが最大の特徴である。このコードは次に示す 2 つの仮定の下で有効である。

- 軌道の曲率半径  $R$  に比べてチャンパーの断面の寸法  $h$  が非常に小さいこと,  $\varepsilon = \sqrt{h/R}$
- 後方に進行する放射場が無視できること

Maxwell 方程式より、以下の式が出てくる。

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(z)) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}(z)) - \frac{\partial^2 \mathbf{E}(z)}{\partial t^2} \\ = \mu_0 \left( \nabla J_0 + \frac{\partial \mathbf{J}(z)}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

ここで、 $J_0$ 、 $\mathbf{J}(z)$  は電荷および電流であり、 $\mu_0$  は真空の透磁率である。ここで光速は 1 としている。この放射場  $\mathbf{E}$  をフーリエ変換し、上記の仮定を元

に近軸光線近似をすると水平・垂直方向に対する放射場  $E_{\perp}$  については

$$\frac{\partial E_{\perp}}{\partial s} = \frac{i}{2k} \left[ \left( \nabla_{\perp}^2 + \frac{2k^2 x}{\rho} \right) E_{\perp} - \mu_0 \nabla_{\perp} J_0 \right] \quad (3.48)$$

ここで  $\nabla_{\perp} = (\partial_x, \partial_y)$ 、 $\nabla_{\perp}^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$  である。進行方向の放射場  $E_s$  については

$$E_s = \frac{i}{k} \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} - \mu_0 J_0 \right) \quad (3.49)$$

となる。以上の展開は超相対論の高エネルギーで成り立つものだが、低エネルギーに対応する式も同様に導くことができる。

計算時間を速くするためにはメッシュの区切りが大きいほうが望ましい。式 (3.48) に見られる  $\nabla J_0$  の項はバンチの横の広がり程度のスケールであるため、細かくメッシュを切る必要がある。それを回避するために、電場  $E$  を放射場  $E'$  とバンチの作る電場  $E^b$  の和として表す方法を提案している。すると、

$$\nabla_{\perp}^2 E_{\perp}^b = \mu_0 \nabla_{\perp} J_0 \quad (3.50)$$

と置き換えることができる。すると、式 (3.48) は次のように書きなおすことができる。

$$\frac{\partial E'_{\perp}}{\partial s} = \frac{i}{2k} \left[ \left( \nabla_{\perp}^2 + \frac{2k^2 x}{\rho} \right) E'_{\perp} + \frac{2k^2 x}{\rho} E_{\perp}^b \right] \quad (3.51)$$

式 (3.51) を解く際にはリープ・フロッグ法 (leap-frog) を用いて  $E'_{\perp}$  を導き、 $E^b$  を足し合わせている。

バンチの分布はガウシアン分布の集まりとして近似しており、模式図を図 3.14 に示す。

ここで、94mm 四方のチャンバーの遮蔽効果を取り入れた計算結果の例を挙げよう。図 3.15 はバンチ長 1 ps、図 3.16 はバンチ長が 10 ps の場合である。短いバンチ長では遮蔽効果が弱く、バンチ長によって大きな差があることがわかる。

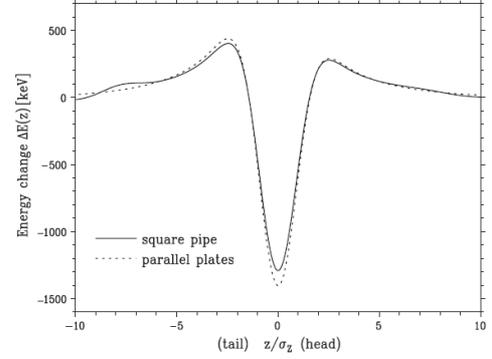


図 3.15: 94mm 四方のチャンバーによる遮蔽効果を含んだ、放射場によるバンチのエネルギー変化。バンチ長は 1 ps、偏向電磁石の曲率半径は 16.3 m である。

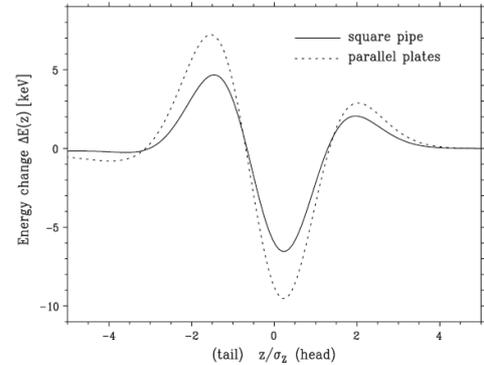


図 3.16: 94mm 四方のチャンバーによる遮蔽効果を含んだ、放射場によるバンチのエネルギー変化。バンチ長は 10 ps、偏向電磁石の曲率半径は 16.3 m である。

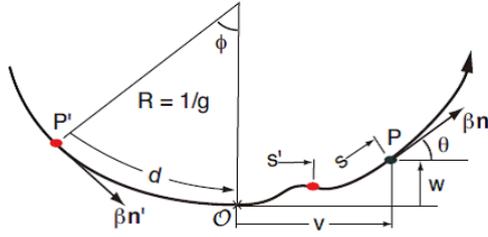


図 3.17: P および P' にある 2 つの電子の軌道の模式図。O と P の間には複数の電磁石からなるラティスが存在する。

● Bmad - D. C. Sagan

電子が低エネルギーである ERL の入射部付近でトラッキングをするために開発されたコードである [6],[24]。このコードでの CSR の影響の計算では、式 (2.8) の第 1 項目のクーロン力による項を組み込んで計算していることが大きな特徴である。ここでは、CSR に関する部分のみを紹介するが、その他の低エネルギーの電子の物理や ERL 入射部の計算例は宮島氏によって OHO'08 で詳しく説明されているのでそちらを参照していただきたい。

Saldin *et al* と同じように 2 つの電子について考え、前方の電子の位置を P、後方を P' であらわす。模式図を図 3.17 に示す。

O は P' の偏向電磁石の出口であり、O から P までには複数の電磁石で構成される。式 (2.8) の Liénard-Wiechert ポテンシャルから求められる電場 E は CSR による電場のほかに、空間電荷効果 (Space Charge Effect) と呼ばれる項が合わさったものである。空間電荷効果とはバンチの中にある電子間の斥力であり、エネルギーが低い場合に顕著に現れる現象である。空間電荷効果による電場 E<sub>SC</sub> はすでにわかっているため、次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{CSR}} &= \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\text{SC}} \\ \mathbf{E}_{\text{SC}} &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n}}{\gamma^2 \zeta^2}, \quad \zeta = L_s - \beta L \end{aligned} \quad (3.52)$$

ここで、L は式 (2.8) と同じ定義で  $L = (t - \bar{t})/c$

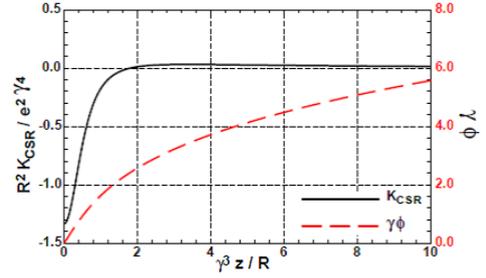


図 3.18:  $K_{\text{CSR}}$  の計算例。ζ は遅延時間。

であり、 $L_s$  は P' から P への軌道に沿った飛行距離である。CSR による電場は  $\mathbf{E}_{\text{CSR}} \equiv \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\text{SC}}$  で求めることができる。

ここでは、水平・垂直方向の CSR の影響は無視し、進行方向の 1 次元のみを扱う。すると、すべての種類の電磁石は偏向電磁石と直線部の組み合わせで表すことができる。それぞれの長さを d と表し、偏向電磁石の場合は曲率半径および偏向角をそれぞれ R および φ と表すことにする<sup>6</sup>。ここで、図 3.17 中の v と w を計算しよう。偏向電磁石 O から P まで N 個の電磁石で構成されているとすると、i 番目の電磁石による v と w の変化量は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta v_i &= \begin{cases} R_i (\sin(\phi_i + \psi_i) - \sin \psi_i) & \text{偏向電磁石} \\ d_i \cos \psi_i & \text{直線部} \end{cases} \\ \Delta w_i &= \begin{cases} R_i (\cos \psi_i - \cos(\phi_i + \psi_i)) & \text{偏向電磁石} \\ d_i \sin \psi_i & \text{直線部} \end{cases} \end{aligned}$$

ここで、 $\psi_i$  は i 番目までの φ の和であり、

$$\psi_i = \sum_{k=1}^{i-1} \phi_k$$

である。

ここで、単位飛行距離当たりの CSR によるエネルギー損失  $K_{\text{CSR}} \equiv d\mathcal{E}/ds$  は Liénard-Wiechert

<sup>6</sup>直線部の場合は  $R = \infty$ 、 $\phi = 0$  である。

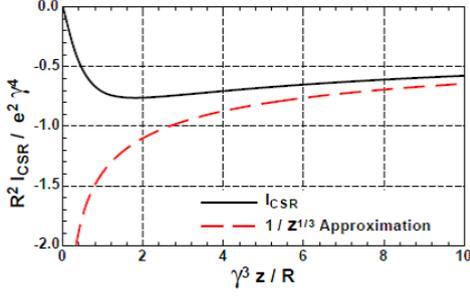


図 3.19:  $I_{\text{CSR}}$  の計算例。  $\zeta$  は遅延時間。

ポテンシャルから次のように求めることができる。

$$\begin{aligned}
 K_{\text{CSR}} &= en \cdot \mathbf{E}_{\text{CSR}} \\
 &= 4r_e mc^2 \gamma^4 \tau^2 \left\{ \frac{g(\tau^2 - \alpha^2)(\alpha - \tau\kappa)}{(\tau^2 + \alpha^2)^3} + \frac{\tau^2 - \alpha^2 + 2\tau\alpha\kappa}{(\tau^2 + \alpha^2)^3} \right\} - \frac{r_e mc^2}{\gamma^2 \zeta^2}
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \gamma^2 \left( \sum_{i=1}^N d_i \left( \psi_i + \frac{1}{2} g_i d_i \right) + g d \sum_{i=1}^N d_i + \frac{1}{2} g d^2 \right) \\
 \kappa &= \gamma(\theta + g d), \quad \tau = \gamma \left( d + \sum_{i=1}^N d_i \right)
 \end{aligned}$$

である。ここで、下付き  $i$  がないパラメータは  $P'$  を含む偏向電磁石を指し、 $\phi_i$  は微小であると仮定している。上の具体的な式を追うことも大切だが、 $\phi_i$ 、 $R_i$  や  $d_i$  の影響を足し合わせることで最終的な式がでることが伝われば十分である。 $\gamma$  で規格化された距離  $\gamma^3 \zeta / R$  を横軸に、 $K_{\text{CSR}}$  をプロットした図を図 3.18 に示す。ここで、 $\zeta \ll R / \gamma^3$  および  $\zeta \gg R / \gamma^3$  の漸近は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 K_{\text{CSR}} &\approx -\frac{4r_e mc^2 \gamma^4}{3R^2} \quad \zeta \ll \frac{R}{\gamma^3} \\
 K_{\text{CSR}} &\approx \frac{2r_e mc^2}{3^{4/3} R^{2/3} \zeta^{4/3}} \quad \zeta \gg \frac{R}{\gamma^3}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

全体のエネルギー損失を  $K_{\text{CSR}}$  で表すと次のよう

になる。

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{d\mathcal{E}}{ds} \right)_{\text{CSR}} &= \int_{-\infty}^{\infty} dz' \lambda(z') K_{\text{CSR}}(z - z') \\
 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{d\lambda(z')}{dz'} I_{\text{CSR}}
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

式 (3.55) で定義される  $I_{\text{CSR}}$  を  $z'$  は式 (3.20) の微分を取り除いた  $z^{-1/3}$  に比例する項と同じになる。

ここで、それぞれの計算結果を比べた結果が図 3.19 である。 $\gamma^3 \zeta / R \gg 1$  の範囲では非常によく一致する一方、 $\gamma^3 \zeta / R < 1$  では  $z^{-1/3}$  の近似式は無限大に発散するが、 $I_{\text{CSR}}$  はゼロに近づき、物理的に意味のある値になっていることがわかる。

Bmad では、入口および出口の過渡状態の式 (3.33) および式 (3.37) も計算に取り込むことが可能である。遮蔽効果を入れた過渡状態についても計算可能である。

### 3.7 シミュレーションコードによる計算結果の比較

新しく開発したシミュレーションコードの計算結果の精度を判断するために、同じ条件の計算結果を比較することは有効である。上に取り上げたコードのうち、TraFiC<sup>4</sup>、TREDI、Li によるコード、elegant、CSR\_CALC(本テキストでは紹介していない)、Dohlus による計算結果 (CSRtrack) が報告されているので紹介する [25]。図 3.20 に示すようなシケインを設定し、シケイン通過後のバンチの平均エネルギー  $E$ 、エネルギー広がり  $\sigma_E$ 、規格化エミッタンス  $\varepsilon$  を評価しているが、それぞれの結果に大きな差は見られない。

また、Sagan は Bmad を吾郷氏の近軸近似法および elegant の計算結果と比較している [26]。図 3.22 の結果より、遮蔽効果がある場合で Bmad と吾郷氏の近軸近似法の結果とよく一致することがわかる。 $h$  が十分大きい値では、elegant の自由空間の計算結果と一致している。

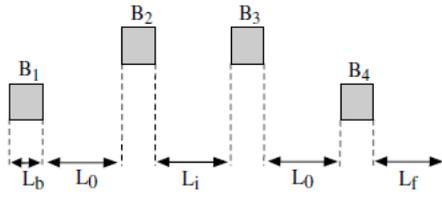


図 3.20: ベンチマークに使われたラティスの模式図

Dimension	Code Name	$\delta E$ (%)	$\delta\sigma_E$ (%)	$e$
3D	TRAFIC4	-0.058	-0.002	1.4
3D	TREDI	-0.041	0.017	2.3
2D	Program by Li	-0.056	-0.006	1.32
1D line charge	ELEGANT	-0.045	-0.0043	1.55
1D line charge	CSR_CALC (Emma)	-0.043	-0.004	1.52
1D line charge	Program by Dohlus	-0.045	-0.011	1.62

図 3.21: それぞれのコードによる CSR の計算結果の比較。  $\delta E$ 、 $\delta\sigma_E$  はそれぞれ平均エネルギーとエネルギー広がりの変化量を表す。初期値の電子エネルギー、バンチあたりの電荷量、規格化エミッタンスはそれぞれ 5 GeV, 1.0 nC, 1.0 mm mrad である。

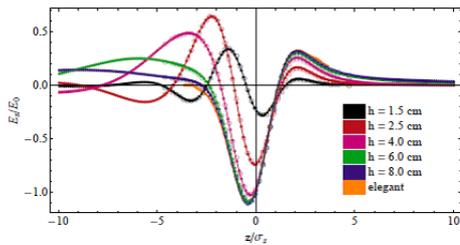


図 3.22: Bmad を吾郷氏の近軸近似法および elegant との比較。  $R=10$  m, 偏向電磁石の長さ  $L = 3.0$  m, チャンパーの水平方向および垂直方向のサイズがそれぞれ 0.5 m および 0.02 m, バンチ長  $\sigma_z=0.3$ mm である。縦軸は  $E_0=2.48$  keV で規格化している。

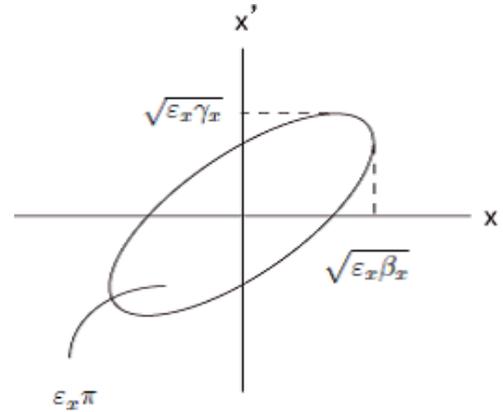


図 4.1: Twiss パラメーターとエミッタンスと位相空間

## 4 CSR の影響とビームダイナミクス

CSR の影響によって引き起こされるエネルギー分布の変化は、低エミッタンスビームの輸送や数十~百フェムト秒の短バンチの実現に大きな障害となる。本章では、CSR の影響がエミッタンスやバンチ長に及ぼすメカニズムを説明し、バンチの質の劣化を防ぐ光学系の設計について紹介する。まずは、その理解のために必要なビームダイナミクスの基礎とバンチ圧縮の原理から始める。

### 4.1 ビームダイナミクスの基礎

ビームダイナミクスの基礎については多くの教科書があり [4]、すでに OHO でも取り上げられているため [27]、[28]、ここで改めて取り上げるのはいささか恐縮してしまいが、本テキストに関わるほんの一部分を紹介する。

水平方向の運動を座標  $x$  とその  $s$  の全微分、 $x' = dx/ds$  で表す。

$$x = \sqrt{\epsilon_x \beta_x} \cos(\phi(s) + \phi_0) \quad (4.1)$$

$$x' = \sqrt{\epsilon_x \gamma_x} \sin(\phi(s) + \phi_1) \quad (4.2)$$

式(4.1)および(4.2)に出てくる  $\beta_x$  および  $\gamma_x$  と、 $-2\alpha_x \equiv \beta'_x$  で定義される  $\alpha_x$  の 3 つが Twiss パラメーターと呼ばれる電子の運動に関するパラメーターである。ここで、

$$\gamma_x \beta_x = 1 + \alpha_x^2 \quad (4.3)$$

という関係式がある。これらは  $s$  に依存する関数で、加速器の光学系によって決まり、個々の電子には依らない。 $\phi(s)$  は  $s$  に依存した位相であり、これも重要なパラメータである。4.4 章で扱うので、後ほど詳しく説明する。 $\phi_0$  および  $\phi_1$  は各電子によって異なる値をもつ位相の初期条件である。 $\varepsilon_x$  はエミッタンスと呼ばれる量で、 $x$  と  $x'$  のばらつきを示す指標であり、Twiss パラメータを用いて次の様に定義される。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{2} \langle \gamma_x x^2 + 2\alpha_x x x' + \beta_x x'^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{x^2}{\beta_x} + \frac{(\alpha_x x + \beta_x x')^2}{\beta_x} \right\rangle\end{aligned}\quad (4.4)$$

ここで  $\langle \rangle$  は全ての電子に対する平均を表す。 $\varepsilon_x \pi$  は、図 4.1 に示した楕円の面積に相当し、電子は各 Twiss パラメータに対応した楕円上を動くことになる。垂直方向でも同様に運動を記述できる。

ある点におけるパンチの状態は 6 次元のベクトルで書き下すと便利である。3.1 章で説明した  $(x, y, z)$  に加えて、 $x, y$  の  $s$  に対する微分とエネルギー偏差  $\delta$  を合わせて、

$$\mathbf{r} \equiv (x, x', y, y', z, \delta)\quad (4.5)$$

と表すことにする。 $\mathbf{r}_0$  の状態の電子がある光学系を通過した後に  $\mathbf{r}_1$  に移ったとする。 $\mathbf{r}_1$  は行列演算で求めることができ、 $6 \times 6$  の転送行列  $\mathbf{R}$  を用いて

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} \mathbf{r}_0\quad (4.6)$$

で与えられる。ここで、 $6 \times 6$  の転送行列の中身は以下のようになる。

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{51} & R_{52} & \cdots & R_{56} \\ R_{61} & R_{62} & \cdots & R_{66} \end{pmatrix}\quad (4.7)$$

CSR によるエミッタンスやパンチ圧縮に及ぼす影響を議論するには、 $\mathbf{r}_0$  のエネルギー変化が  $\mathbf{r}_1$  に及ぼす影響が重要である。このことから、 $R_{16}$ ,  $R_{26}$  そして特に  $R_{56}$  が重要なパラメータとして出てくる<sup>7</sup>。

<sup>7</sup> $R_{55}$  はおおむね 1 である。

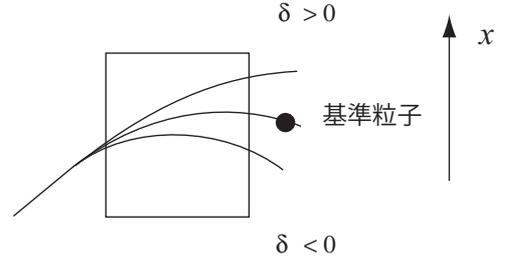


図 4.2: エネルギー偏差による遅れ

ここで、偏向電磁石における電子の転送行列について考えよう。図 4.2 にエネルギー偏差  $\delta$  があるときの軌道を示す。エネルギーが基準粒子より高い状態、つまり  $\delta > 0$  の場合は曲がりにくくなるため、外側に逸れてしまう。 $\delta < 0$  の場合は、逆の傾向が現れる。ここで具体的な  $\mathbf{R}$  の成分を求めよう。偏向電磁石の偏向角を  $\theta$  とし、軌道の曲率半径を  $\rho$  とする。垂直成分の運動は無視して他の要素のみを抜き出すと、次のようになる。

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{15} & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & R_{25} & R_{26} \\ R_{51} & R_{52} & R_{55} & R_{56} \\ R_{61} & R_{62} & R_{65} & R_{66} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta & 0 & \rho(1 - \cos \theta) \\ -\sin \theta / \rho & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ -\sin \theta & \rho(\cos \theta - 1) & 1 & \rho \sin \theta - s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4.8)$$

ここで、エネルギーは十分大きいと仮定し、 $\gamma^{-2}$  の項は無視した。このエネルギー偏差によって、電子は位相空間上を図 4.3 のようにシフトする。

このように偏向電磁石ではエネルギー偏差によって軌道が異なる。これを  $s$  の関数として表したものが分散関数  $\eta_x$  と呼ばれるものである。これは、エネルギー偏差によって生じる水平方向のずれの指標であり、次のように定義される。

$$x = x_\beta + \eta_x \delta\quad (4.9)$$

ここで、 $x_\beta$  は  $\delta = 0$  のときの軌道である。分散関数がゼロでない場合を '分散がある' という表現をすることも

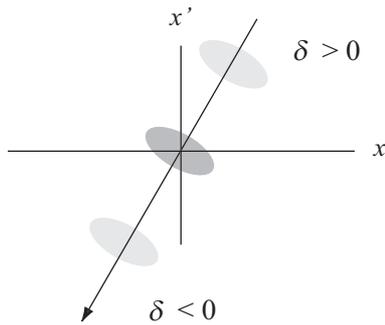


図 4.3: エネルギー変化による位相空間上のシフトの例。これは  $\eta_x = 0$  のオプティクスから偏向電磁石に入った場合。

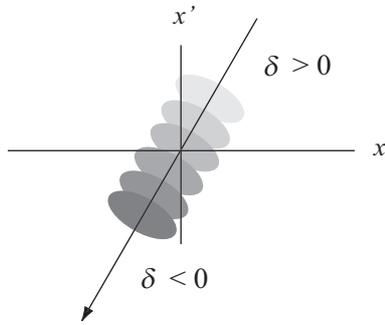


図 4.4: 射影エミッタンスの模式図

あり、エネルギー広がりによってバンチが水平方向に広がってしまう。このときの位相空間の様子を例を図 4.4 に示す。図 4.4 の全体の面積が射影エミッタンス  $\varepsilon_{px}$  と呼ばれるものである [29]。ERL で求められている低エミッタンスビームとは概ね射影エミッタンス  $\varepsilon_{px}$  が小さいビームのことを指す。これは次の式で定義される。

$$\varepsilon_{px} = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2} \quad (4.10)$$

式 (4.4) のエミッタンス  $\varepsilon_x$  とは違うことに注意してほしい。 $\varepsilon_x$  は、初期の電子分布と光学系で決まるエミッタンスであり、 $\varepsilon_{px}$  は分散関数や CSR の影響などによるエネルギー変化の影響を含めたエミッタンスである。図 4.4 では、 $\varepsilon_{px}$  は全ての楕円の面積の和になるのに対し、 $\varepsilon_x$  はひとつの楕円の面積に相当する。

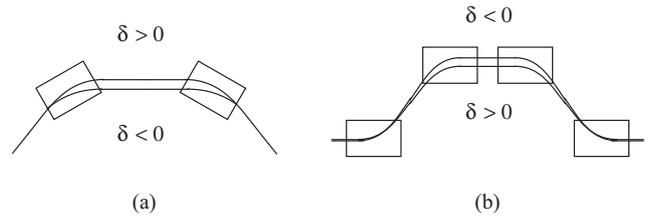


図 4.5: アーク (a) とシケイン (b) の模式図

放射光を取り出す位置の  $\varepsilon_{px}$  を小さくするためには、その部分の分散関数をできる限りゼロに近くすることが望ましい。よって、偏向電磁石の間に 4 極磁石などを組み合わせて、最終的に分散関数がゼロになるような光学系を組み立てる方法が主流である。このような光学系をアクロマティックであると呼ぶ。 $\eta_x$  と転送行列の  $R_{56}$  は密接な関係にあり、

$$R_{56} = \int \frac{\eta_x(s)}{\rho(s)} ds \quad (4.11)$$

となる。

## 4.2 偏向電磁石からなる光学系によるバンチ圧縮

エネルギー偏差がある電子は偏向電磁石を通過するときに軌道がずれ、それによって進行方向の位置にもずれが生じる。この性質を利用してバンチ長を調整するような光学系を作ることができる。偏向電磁石からなる光学系には主に 2 種類がある (図 4.5)。

ひとつはアークと呼ばれるものであり、電子の向きを変えるための光学系である。周回部とも呼ぶ。もうひとつはシケインと呼ばれるもので、進行方向を変えないまま、エネルギー圧縮やバンチ圧縮を行うための光学系である。まず、周回部で考えてみよう。周回部では、エネルギーが大きい電子は、偏向電磁石を遠回りすることによって遅れが生じ、逆に、エネルギーが小さい電子は内側を通るため前方に進む。もし、バンチ前方の電子がエネルギーが大きく、後方で小さい場合は、バンチの中央に電子が集まることになり、バンチ長が短くなる。模式図を図 4.6 に示す。シケインの場合はエネルギーが小

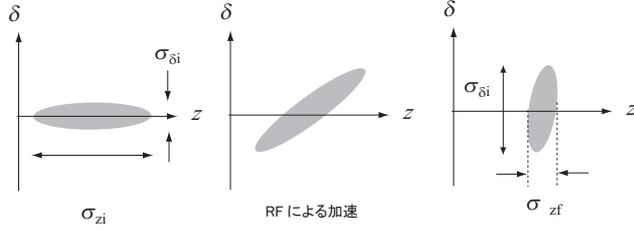


図 4.6: 周回部におけるバンチ圧縮の模式図

さいほど大きく曲げられるために、遠回りをする。したがって、シケインでバンチ長を短くするには、バンチ前方のエネルギーが小さく、後方で小さくする必要がある。ERL では周回部でバンチ圧縮をする計画になっているため、これからは周回部の場合について説明する。

縦軸をエネルギー偏差  $\delta$ 、横軸を  $z$  とした位相空間（縦方向の位相空間）がバンチ圧縮のときに変化する様子を図 4.6 に示す。位相空間上に垂直にした場合にバンチ長が最短になる。図 4.6 の回転角度は転送行列の  $R_{56}$  で決まる。また、 $\delta$  に対する高次項も考慮にいれると、バンチ圧縮による縦方向の位置のずれ  $\Delta z$  は次のようになる。

$$\Delta z = R_{56}\delta + R_{566}\delta^2 + R_{5666}\delta^3 + \dots \quad (4.12)$$

$R_{56}$  がゼロの場合ではバンチ長は変わらず、このような周回部をアイソクロナスという。

エネルギー分布の傾斜は加速正弦波の位相  $\phi_{\text{RF}}$  をずらすことによって調整可能である。模式図を図 4.7 に示す。加速周波数を  $f_{\text{RF}}$  とすると、 $\delta$  は  $z$  に依存する関数となり、

$$\delta(z) \approx \frac{1}{\cos \phi_{\text{RF}}} \left[ -\frac{2\pi f_{\text{RF}}}{c} z \sin \phi_{\text{RF}} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi f_{\text{RF}}}{c} z \right)^2 \cos \phi_{\text{RF}} \right] \quad (4.13)$$

となる。ここで最初の係数  $1/\cos \phi_{\text{RF}}$  は  $z = 0$  の加速を一定にするために導入した。

ここで式 (4.12) および (4.13) について 1 次項のみを取り上げて考えよう。圧縮前のバンチ長およびエネルギー広がりをそれぞれ  $\sigma_{zi}$  および  $\sigma_{\delta i}$  とする。すると、バンチ圧縮後のバンチ長  $\sigma_{zf}$  およびエネルギー広がり  $\sigma_{\delta f}$  は

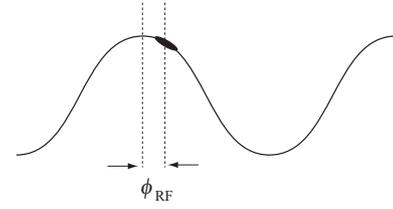


図 4.7: RF による傾斜の模式図

$R_{56}$  を用いて次のようになる [30]。

$$\sigma_{zf} = \sqrt{(1 + kR_{56})^2 \sigma_{zi}^2 + R_{56}^2 \sigma_{\delta i}^2} \quad (4.14)$$

$$\sigma_{\delta f} = \sqrt{k^2 \sigma_{zi}^2 + \sigma_{\delta i}^2} \quad (4.15)$$

ここで、 $k \equiv d\delta_f/d\sigma_i$  とし、 $\delta_f$  は式 (4.13) の加速後のエネルギーを表す。図 4.6 の模式図からもわかるように、バンチ長が短くなる代償として、エネルギー広がり  $\sigma_{\delta}$  が大きくなってしまふ。バンチ長を最短にするには、式 (4.14) で  $1 + kR_{56}$  がゼロになる場合で

$$f_{\text{RF}} = -\frac{c}{2\pi \tan \phi_{\text{RF}} R_{56}} \frac{\sigma_z}{\sigma_z} \quad (4.16)$$

とすればよく、図 4.6 で縦の位相空間が直立する。このときのバンチ長は  $\sigma_{zf} \approx R_{56}\sigma_{\delta i}$  となり、初期のエネルギー広がりによって決まる。また  $\sigma_{zf} \gg R_{56}\sigma_{\delta i}$  の場合は

$$\sigma_{zf} \approx |1 + kR_{56}| \sigma_{zi} \quad (4.17)$$

となり、 $kR_{56}$  でバンチ長を変えることができる。

CSR の影響がバンチ圧縮に影響を及ぼす場合がある。位相をずらした RF によるエネルギー分布に CSR の影響が重なると、図 4.8 に示すようにバンチの中央の傾斜がきつくなる。これは、バンチが局所的に強く圧縮されることを示す。その結果、バンチ形状はガウス分布でなくなり、局所的に電子が集まったところからさらに強い CSR が発生するなどの影響が生じる。

$k$  を大きくすることはエネルギー広がりを大きくすることに相当するため、 $R_{56}$  も可変であることが望ましい。したがって、周回部のラティスは 3 つ以上の偏向電磁石が組み込まれていることが理想である。3 つの偏向電磁

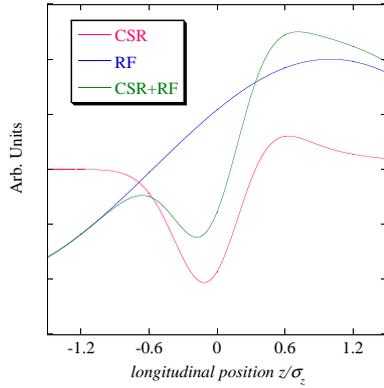


図 4.8: CSR の影響と加速 RF が電子バンチに与えるエネルギー変化の計算例

石からなるアクロマティックなラティスを TBA (Triple Bend Achromat) と呼ぶ。ラティス構造とそのオプティクスを図 4.9 に載せる。4 極電磁石の強さを調整すると、中央の偏向電磁石 (図 4.9 では、2 番目と 3 番目の偏向電磁石の間) の  $\eta_x$  の値を負の値にすることもでき、式 (4.11) の  $R_{56}$  を正の値から負の値にわたって調整することが可能である。

### 4.3 R 行列によるエミッタンスの計算

トラッキングによる CSR によるエミッタンスのシミュレーションは時間がかかり、光学系の最適化の能率に影響を及ぼす。ここで、エネルギー変化による影響を一次の項まで考慮に入れた R 行列による計算方法が提案された [31]。ここで、CSR によるエネルギー変化を組み入れた運動を考えよう。偏向電磁石内では水平方向  $x$  の運動方程式は次のようになる。

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{x}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}[\delta + \delta_{\text{CSR}} + \kappa(s - s_A)] \quad (4.18)$$

ここで、右辺の最初の 2 項は偏向電磁石を通過するときの基本となる方程式であり、残りの 2 項が CSR によって新たに付け加えられた項である。 $s_A$  は偏向電磁石の入り口を示し、 $s_A$  に到達する前に CSR によって変化したエネルギーを  $\delta_{\text{CSR}}$  と表す。 $\kappa$  は wake ポテンシャル

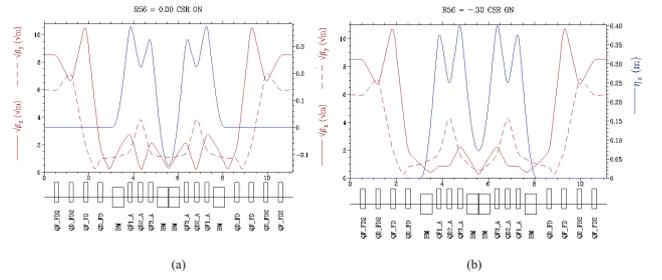


図 4.9: TBA のラティス構造とその  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  および  $\eta_x$  関数の例。ラティスの BM\*および Q\*はそれぞれ偏向電磁石と 4 極電磁石を表す。(a):アイソクロナス ( $R_{56} = 0$ ) で中央で  $\eta_x = -0.14$ 、(b): $R_{56} = -0.3$  で中央で  $\eta_x = 0.08$



図 4.10: テスト用の光学系

を基準エネルギー  $E_0$  で規格化した項で  $\kappa \equiv d\delta/ds$  となる。

式 (4.18) の運動を表すには、位相空間上の位置ベクトルを次のように定義すると便利である。

$$\mathbf{r} \equiv (x, x', \delta, \delta_{\text{CSR}}, \kappa)^T \quad (4.19)$$

そして、 $r_0$  から  $r_1$  までの  $5 \times 5$  の転送行列、 $r_0 = R_{0-1}r_1$  と定義しよう。偏向角度が  $\theta$  の偏向電磁石については次

のように書き下すことができる。

$$R_{bend} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta & \rho(1 - \cos \theta) \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho(1 - \cos \theta) & \rho^2(\theta - \sin \theta) \\ \sin \theta & \rho(1 - \cos \theta) \\ 0 & 0 \\ 1 & \rho\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

ここで、分散関数  $\eta_x$  に加えて  $\zeta_x$  を新しく定義しよう。  
 $\zeta_x$  は CSR に対する分散関数であり、

$$x = x_\beta + \eta_x \delta + \zeta_x \delta_{CSR} \quad (4.21)$$

ここで、 $x_\beta$  は  $\delta = \delta_{CSR} = 0$  の場合の位置である。CSR の影響によるエネルギー変化は  $x$  には依らないと仮定しているので、 $x$  の分散は  $x_\beta$  と  $\Delta x = \zeta_x \delta_{CSR}$  の分散の和になる。すると、エミッタンス  $\varepsilon_x$  は式 (4.10) を用いて、

$$\varepsilon_x^2 = (\varepsilon_0 \beta_x + D^2)(\varepsilon_0 \gamma_x + D'^2) - (\varepsilon_0 \alpha_x - DD')^2 \quad (4.22)$$

$D$  は wake ポテンシャルによるエネルギー偏差の広がり  $\Delta E_{rms}$  を用いて次のように定義する。

$$D = \frac{\Delta \delta_{rms}}{L} \zeta_x = \frac{\Delta E_{rms}}{E_0} \frac{1}{L} \zeta_x \\ D' = \frac{\Delta \delta_{rms}}{L} \zeta'_x = \frac{\Delta E_{rms}}{E_0} \frac{1}{L} \zeta'_x \quad (4.23)$$

ここで、 $L$  は偏向電磁石の長さであり、 $'$  は進行方向  $s$  に対する 1 階微分である。 $\Delta E_{rms}$  は式 (3.30) から推定することができる。

この方法でエミッタンスを求めるには、

- バンチ長が変化しないこと
- 軌道の曲率半径  $\rho$  が常に一定であること

という条件が必要である。また、過渡状態が無視できない場合は、式 (3.20) に補正項を与えて  $\kappa$  を求める必要

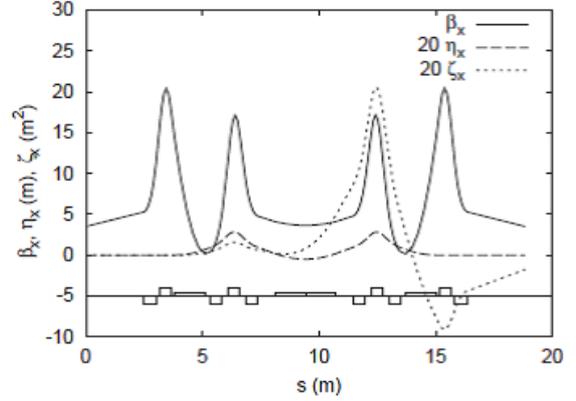


図 4.11: 図 4.10 のベータ関数、分散関数および CSR 分散関数

がある。分散関数  $\eta_x$  を CSR の分散関数  $\zeta$  は次の式で求めることができる。

$$(\eta_x(s_1), \eta'_x(s_1), 1, 0, 0)^T = R_{0-1}(\eta_x(s_1), \eta'_x(s_1), 1, 0, 0)^T \\ (\zeta_x(s_1), \zeta'_x(s_1), 1, 0, 0)^T = R_{0-1}(\zeta_x(s_1), \zeta'_x(s_1), 1, 0, 0)^T$$

この式を使って図 4.10 の光学系を計算した例を図 4.11 に示す。出口で  $\eta_x$  がゼロになっているにもかかわらず、 $\zeta_x$  がゼロになっていないことが分かるだろう。これは、アクロマティックな光学系でも、CSR によるエネルギーが変化した電子は基準粒子の軌道と合流しないという意味である。低エミッタンスに最適な光学系にするには  $\zeta_x$  も出口でゼロになるのが望ましい。次の章で、そのような光学系について考えよう。

#### 4.4 位相調整法によるエミッタンス劣化の最小化

前章で述べた  $\zeta$  をゼロにするにはどうすればいいだろうか？ひとつの解として式 (4.1) の位相の進み  $\phi(s)$  を調整する方法があるので紹介しよう。周回部は  $n$  個の同じ光学系の繰り返し（ひとつの光学系の塊をセルという）で構成されている場合、位相の進みを  $2\pi m/n$  とすればよい。ここで  $m$  は整数である。簡単のために、 $n = 2$ 、 $m = 1$  の場合について考えよう。

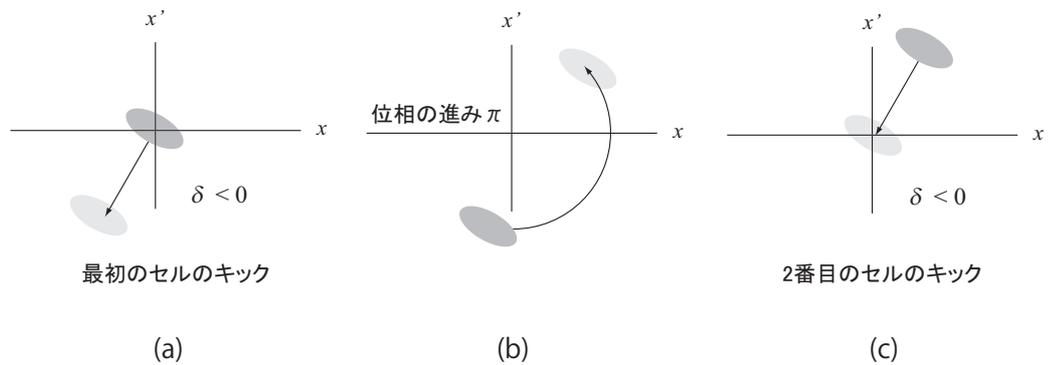


図 4.12: 位相  $\phi(s)$  の進みが  $\pi$  のときの CSR の抑制

図 4.12 に模式図を示す。(a) は最初のセルで CSR のキックを受けた様子である。位相が進みが  $\phi$  であるため、位相空間の楕円上を半周する (b)。その後、2 つ目の偏向電磁石で CSR のキックを受ける (c)。すると、最終的には元の位置に戻り、CSR によるキックは相殺される。

TBA に対して、セルあたりの位相の進みが  $\phi = 8\pi/3$  の 3 セル構造を組み立てた例がある。その光学系を図 4.13 に示す。この光学系でエミッタンスの増加を計算した結果が図 4.14 である。R 行列と elegant の結果はよく一致している。このことから、一次の近似では最後に CSR のキックが相殺され、エミッタンスの増加が抑えられていることがわかる。すでに気づいているかもしれないが、この抑制効果によってエミッタンスの増加をゼロにするには、パンチ長が一定である必要がある。出ないと、図 4.12 の (a) と (c) のキックの強さが違ってしまいうためである。

ここで、理解を深めるために転送行列を用いて射影エミッタンスの変化について説明する [32]。式 (4.4) で定義されたエミッタンスからコヒーレントな摂動を受けた時の射影エミッタンスを推定することができる。

$$\varepsilon_{px} \approx \varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x}{\beta_x} \left[ \langle \Delta x^2 \rangle + (\alpha_x \langle \Delta x^2 \rangle^{1/2} + \beta \langle \Delta x'^2 \rangle^{1/2})^2 \right] \quad (4.24)$$

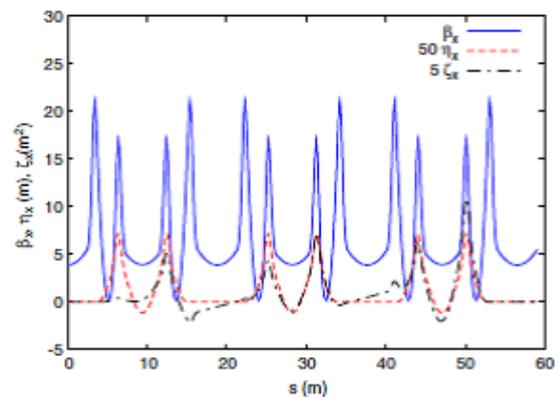


図 4.13: 図 4.10 で位相調整をしたときのベータ関数、分散関数および CSR 分散関数

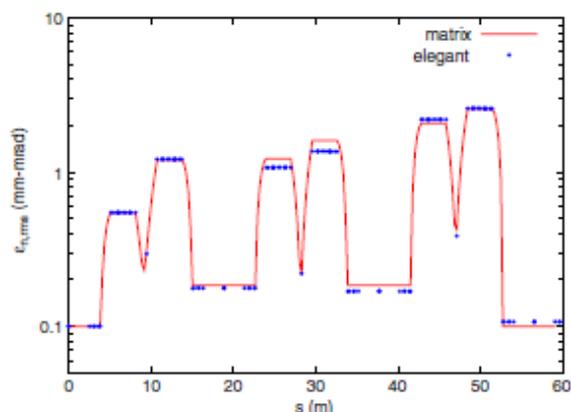


図 4.14: 図 4.10 で位相調整をしたときのエミッタンスの計算値。elegant の結果 (ドット) とよく一致している。

ここで、

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \left( \int R_{16}(s) \frac{d\sigma_\delta}{ds} ds \right)^2 \quad (4.25)$$

$$\langle \Delta x'^2 \rangle = \left( \int R_{26}(s) \frac{d\sigma_\delta}{ds} ds \right)^2 \quad (4.26)$$

である。もし、バンチ長が一定であれば、CSR の影響によって引き起こされる  $d\sigma_\delta/ds$  は一定である。このような場合は、 $\int R_{16} ds = 0$  として  $\int R_{26} ds = 0$  の場合に  $\varepsilon_{ps}$  の増加を防ぐことができる。このようなラティスはあるセルで受けたキックが別のセルのキックで打ち消されることを意味し、これまでの議論と同じである。しかし、バンチ長に変化がある場合でも、式 (4.26) および式 (4.26) をゼロに近づけることでエミッタンス増加を抑えることができるだろう。

#### 4.5 エンヴェロップ・マッチングによるエミッタンス劣化の最小化

十分にスペースを確保できない場合、4.4 章に示したように位相の進みを調整する余裕がない場合がある。そのような場合でも、エミッタンス増加を完全に抑制することはできないが、最小にとどめる方法がある。エミッタンスの楕円の長径方向と CSR のキックの方向を一致

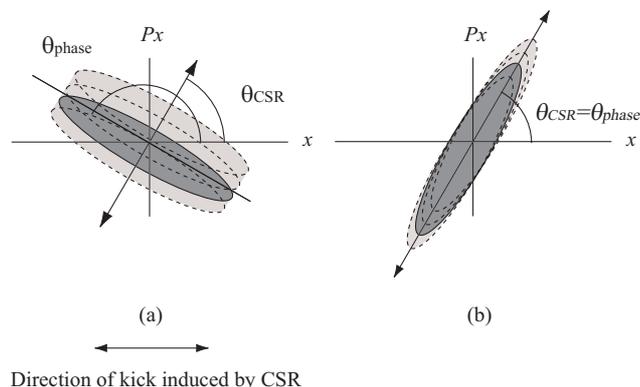


図 4.15: エネルギー変化による位相空間上のシフト

させる手法であり、エンヴェロップ・マッチングと呼ばれる。

エネルギーが変化した電子の動きを位相空間上で見てみよう。図 4.3 に示したようにエネルギーにずれが起こると、位相空間上をシフトするがその方向は偏向電磁石のパラメーターで決まる。その方向  $\theta_{CSR}$  は次のように転送行列の成分から求めることができ、

$$\theta_{CSR} = \frac{R_{26}}{R_{16}} = \frac{\sin \theta}{\rho(1 - \cos \theta)} \quad (4.27)$$

となる。通常、位相空間は楕円であり、その傾き  $\phi$  は Twiss パラメーターで

$$\tan 2\theta_{Phase} = 2\alpha/(\gamma - \beta) \quad (4.28)$$

となる。

図 4.15 に位相空間の楕円の  $\phi$  が  $\theta_{CSR}$  と垂直である場合 (a) と直線上にある場合 (b) を図示した。図から、(b) で全体の楕円の占める面積、エミッタンスが小さいことがわかるだろう。

バンチ当たりの電荷量がサブナノクーロン以上に大きくなると、多次項成分が無視できなくなり、エミッタンスが最小となる点が  $\theta_{CSR} = \theta_{Phase}$  という条件から外れてしまうこともある [33]。

#### 4.6 コンパクト ERL の周回部の最適化

ここで、ERL の試験器として計画中のコンパクト ERL で、周回部の最適化を行ったので紹介する。まずは、パ

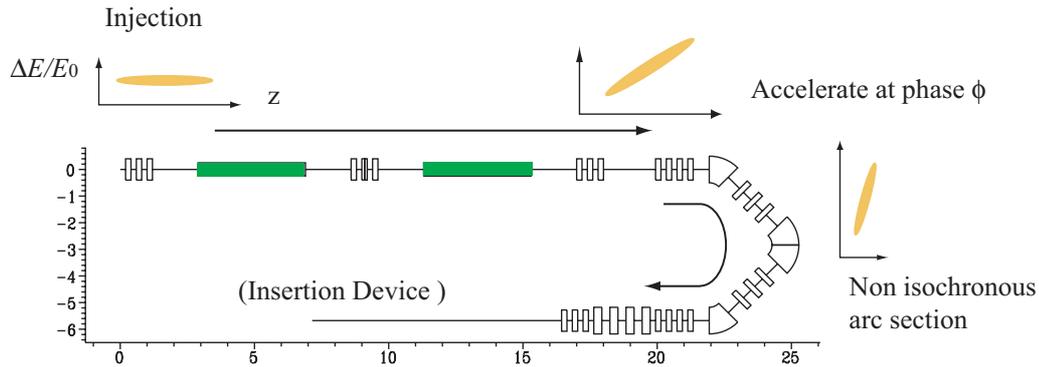


図 4.16: コンパクト ERL のラティス案

ラメーターの設定について説明する。最終的な ERL で目指すエネルギー 5GeV とエミッタンス  $10^{-12} \text{m} \cdot \text{rad}$  は、波長  $\lambda_{SR} = 10^{-10} \text{m}$  で強い放射光を取り出すことを目安にして決めている。5GeV とは、ERL にはアンジュレーターと呼ばれる放射光を取り出す挿入光源の 0 次光の放射光の波長が  $10^{-10} \text{m}$  となるエネルギーである。エミッタンス  $10^{-12} \text{m} \cdot \text{rad}$  は回折限界  $\varepsilon_x < \lambda_{SR}/4\pi$  から決まり、この回折限界以下にエミッタンスを小さくしても輝度が高くなることはない。

しかし、エネルギーの低いコンパクト ERL でエミッタンス  $10^{-12} \text{m} \cdot \text{rad}$  はほぼ不可能である。なぜなら、数 MeV 以上では CSR の影響は電子のエネルギーに因らずにバンチ長と電荷量に依存するため、エネルギーが低いほどエミッタンスに対する影響は大きくなるためである。そこで、エネルギーの異なるコンパクト ERL でエミッタンスの評価を行うときは、電子のエネルギーを考慮に入れたエミッタンスが必要とされる。これは、規格化エミッタンス  $\varepsilon_{nx}$  と呼ばれ、 $\varepsilon_{nx} = \gamma\varepsilon_x$  と定義される。このコンパクト ERL での規格化エミッタンスの目標値は  $10^{-7} \text{m} \cdot \text{rad}$  とする。

電子のエネルギーは最大 165MeV、バンチ長は通常モードで数 ps、バンチ圧縮モードで 0.1 ps を目標としている。通常モードのバンチ長は 1.3GHz の RF 周波数で加速した際、エネルギー偏差  $\delta$  の拡がり  $5 \times 10^{-5}$  以下にするためである。バンチ当たりの電化量は 77pC が目標値である。バンチ圧縮モードでは、テラヘルツコヒーレント光やフェムト秒 X 線の光源利用が目的であ

表 4.1: コンパクト ERL のパラメーターの設定

モード	低 $\varepsilon_{nx}$	バンチ圧縮	
		THz CSR	fs X-ray
$E_0$	165MeV	165MeV	65MeV
$\sigma_z$	1 ps	0.1 ps	< 0.1 ps
$\varepsilon_{xn}$	$10^{-7} \text{m} \cdot \text{rad}$	$10^{-4} \text{m} \cdot \text{rad}$	$10^{-4} \text{m} \cdot \text{rad}$

り、バンチ当たりの電荷量は 1 nC を目標値としている。テラヘルツギャップと呼ばれる 1THz から 10THz までの CSR を光源として利用するためにはバンチ長が 0.1 ps 以下であることが望ましい。この場合、CSR の影響によってエミッタンスの増加を抑えることは困難であるため、目標値を  $10^{-4} \text{m} \cdot \text{rad}$  とする。これは、横方向のビームのサイズを波長以下に抑える必要があるためである。フェムト秒 X 線では電子のエネルギーに条件が加わり、ユーザーが必要とする 50keV 付近をチタン・サファイアレーザーで発生させるには電子エネルギーが 65MeV 程度でなければならない。これは、テラヘルツ光源のケースに比べて CSR の影響が大きく、バンチ圧縮はより困難となる。これらのパラメーターを表 4.1 にまとめた。

図 4.16 にコンパクト ERL のレイアウトを示す。低エミッタンスモードでは RF の位相をずらすことなく加速し、アイソクロナス ( $R_{56} = 0$ ) の周回部を通す。バンチ圧縮のモードでも、入射時のバンチ長は低エミッタンス

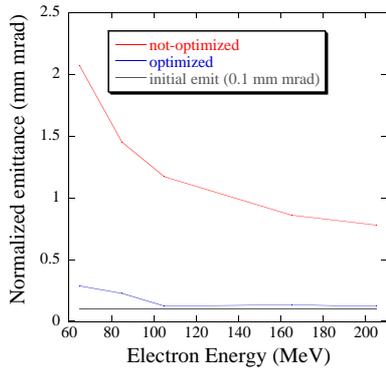


図 4.17: コンパクト ERL の周回部において生じる CSR によるエミッタンス増大の計算。エンヴェローブ・マッチングを満たすように周回部の光学系を最適化すると、エミッタンスの増加を抑えることができることが示されている。バンチ当たりの電荷量は 77 pC、バンチ長は 1 ps である。

モードと同じである。これは、CSR の影響はエネルギーが低いほど大きいためであり、バンチ圧縮は加速後に行う。左上から入射したバンチは加速空洞でバンチ中心にある基準粒子が最大エネルギーになるまで加速し、RF の位相は前方でエネルギーが高く、後方で低くなるように調整する。このように進行方向にエネルギー分布に傾斜がついたバンチが、 $R_{56} > 0$  の周回部を通してバンチ長が短くなる<sup>8</sup>。周回部直後の周期長補正のためのシケインがあり、その後に入射光源が入る直線部が続く。規格化エミッタンスおよびバンチ長の評価は挿入光源が入る直線部で行う。

シミュレーションコード elegant を用いて、周回部の最適化を行った結果について紹介する。バンチ当たりの電荷量 77 pC、バンチ長 1 ps とし、低エミッタンスモードで規格化エミッタンスの増大を評価した。エミッタンス増加を抑えるには遮蔽効果が一番期待できると述べた。しかし、偏向電磁石の曲率半径は 1 m であることから、式 (3.39) より遮蔽効果が期待できるのはチャンバーの断面のサイズがバンチ長程度となり、現実的でない。これまで、エミッタンスの増加を抑制する方法を 2

<sup>8</sup>  $R_{56}$  の符号の定義は計算コードによって異なる。本テキストでは elegant の定義に合わせる。

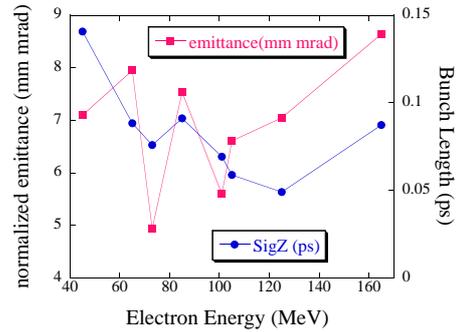


図 4.18: 電子のエネルギーを変えたときの最短バンチ長と規格化エミッタンスを計算した結果。バンチ当たりの電荷量は 77 pC

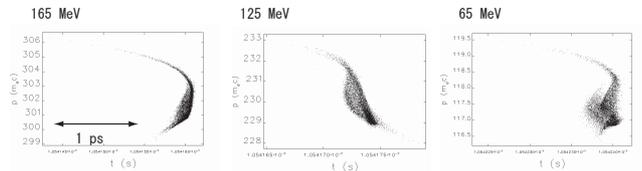


図 4.19: バンチ圧縮後の縦方向の位相分布。電子のエネルギーは 165MeV, 125MeV および 65MeV の場合で計算。

つ紹介したが、コンパクト ERL では直線部までの磁石の数に限りがあるために位相調整法を使うことができないため、エンヴェローブ・マッチング法で最適化した。電子のエネルギー 65MeV から 205MeV に対してシミュレーションした結果を図 4.17 に示す。エンヴェローブ・マッチング法によって、効果的にエミッタンス増加を抑制できていることがわかる。65MeV 付近に残るに規格化エミッタンスの増加も輝度が著しく減少するレベルではなく、低エミッタンスモードは周回部の最適化によってシミュレーション上では実現可能であることがわかる。

次はバンチ圧縮モードについて評価を行った。図 4.18 はバンチ長が最短になるように最適化したときの挿入光源でのバンチ長および規格化エミッタンスである。全体的な傾向としては、電子エネルギーが大きいほどバンチ長が長くなるが、揺らぎが大きい。これは、光学系の高次項や CSR の影響によって生じたテールの影響が原因

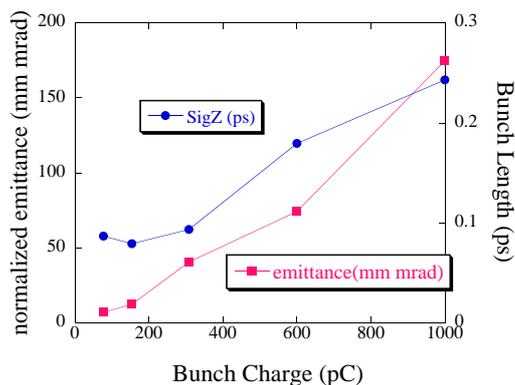


図 4.20: バンチ当たりの電荷量を変えたときの最短のバンチ長と規格化エミッタンスを計算した結果。電子のエネルギーは 165MeV である。

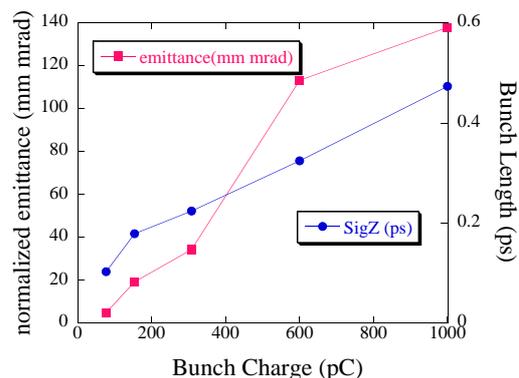


図 4.21: バンチ当たりの電荷量を変えたときの最短のバンチ長と規格化エミッタンスを計算した結果。電子のエネルギーは 65MeV である。

である。図 4.19 に 165MeV, 125MeV および 65MeV の場合の縦方向の位相空間のプロットを示す。ここでは、縦軸は  $\delta$ 、横軸は  $t = cz$  である。縦方向のバンチの形状が複雑に変化するが、密度の高い部分のみを切り取ると、バンチ長が電子のエネルギーにしたがって短くなることが見て取れる。

バンチ当たりの電荷量が 1 nC の場合について、電子のエネルギーが 165MeV と 65MeV の場合で検証を行った結果をそれぞれ図 4.20 と 4.21 に示す。165MeV では電荷量が大きくなるにつれ、達成可能なバンチ長が限られてしまうが、400 pC 以下であれば、バンチ長 0.1 ps 以下および規格化エミッタンス  $10^{-4} \text{m} \cdot \text{rad}$  を実現できる見込みがある。1 nC の場合でも 0.25 ps 以下まで圧縮することができ、エミッタンス増加もコヒーレント性を著しく損なうほど大きくはない。図 4.21 に示した 65MeV の場合では、電子のエネルギーが低いために CSR の影響の影響を受けやすく、165MeV に比べてバンチ圧縮が困難であることがわかる。バンチ長 0.1 ps を実現するにはバンチ当たりの電荷量を 100 pC 以下に抑えなければならないことがわかる。

## 5 謝辞

このテキストを完成させるにあたり、多くの人の協力をいただきました。特に、CSR の原理から計算コードまで、詳細に原稿を見ていただいた吾郷智紀氏には、心より感謝しています。また、日本原子力機構の羽島良一氏から CSR からビームダイナミクスまで幅広い面でご指摘を頂きました。また、横谷馨氏からは貴重なご意見をいただきました。宮島司氏には低エネルギーの CSR について有意義な議論をしていただきました。最後に、放射光施設の小林幸則氏、坂中章悟氏、原田健太郎氏には、本テキスト執筆のために日常の業務に配慮をしていただきました。ここで、改めて感謝の意を示したいと思います。

コヒーレント放射光の影響とバンチ圧縮という難しいテーマについて、筆者の力量以上のトピックを詰め込んでしまったため、説明不十分な箇所が多数あるかとおもいますが、おおよその全体像が伝わればうれしいと思います。

## Appendix

### A 遮蔽効果を含めたインピーダンスの導出

ここで遮蔽効果のインピーダンスを求める手順について概略を紹介する [20]。本章では極座標  $(r, \theta, z)$  を使う。Frenet-Serret 座標系との関係式は  $r = x$ ,  $r\theta = s$  および  $z = y$  となる。

Warnock によると [19],[13]、インピーダンス  $\bar{Z}$  はベッセル関数 (Bessel function) を用いて表すことができる。ベッセル関数とは

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{df(x)}{dx} \right) + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) f(x) = 0 \quad (\text{A.1})$$

を満たす関数のことであり、2つの独立な関数  $J_n(x)$  および  $Y_n$  がある。その他に  $H_n^{(1)}$  は第1種ハンケル関数 (Hankel function) が次のように定義されている。

$$H_n(x) = J_n(x) + iY_n(x) \quad (\text{A.2})$$

このハンケル関数も式 (A.1) の解となる。周回当たりのインピーダンスは次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\bar{Z}(n, \omega)}{n} &= \frac{2\pi^2 Z_0 R}{\beta h} \\ &\times \sum_{p=0}^{\infty} \Lambda_p \left[ \frac{\beta \omega R}{nc} J'_n(\gamma_p R) H_n^{(1)}(\gamma_p R) \right. \\ &\left. + \frac{\alpha_p^2}{\gamma_p^2} J_n(\gamma_p R) H_n^{(1)}(\gamma_p R) \right] \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

ここで、 $\delta h$  はパンチの垂直方向のサイズであり、 $Z_0$  は真空のインピーダンスである。下付き  $p$  は垂直方向のモード番号を表し、 $\alpha_p$  および  $\gamma_p$  は、 $z$  方向の波数および  $r$  方向の波数で次のように決められる。

$$\alpha_p = \frac{\pi}{h} (2p+1) \quad \gamma_p = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha_p^2}, \quad (\text{A.4})$$

さらに、次のパラメーターを導入している。

$$\Lambda_p = \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2, \quad x = \frac{\pi \delta h}{2h} (2p+1) \quad (\text{A.5})$$

$\gamma \rightarrow \infty$ ,  $\delta h \rightarrow 0$  の極限で単位長さ当たりのインピーダンス  $Z$  を求める。変数を  $k = \omega/\beta c = n/R$  とすると、次のようになる。

$$Z(k) = Z_0 \frac{\pi k R}{h} \sum_{p=0}^{\infty} \left[ J'_n(r) H_n^{(1)}(r) - \left( 1 - \frac{n^2}{r^2} \right) J_n(r) H_n^{(1)}(r) \right] \quad (\text{A.6})$$

$$r \equiv n \sqrt{1 - \left( \frac{\alpha_p}{k} \right)^2} \quad (\text{A.7})$$

ここで表現を簡単にするために、ベッセル関数の代わりにエアリー関数 (Airy function) を導入する [20], [21]。エアリー関数とは、

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} - z f(z) = 0 \quad (\text{A.8})$$

の微分方程式を満たす関数である。すると、式 (A.6) の実部は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Re Z(k) &= Z_0 \frac{\pi k R}{h} \sum_{p=0}^{\infty} \left[ J_n'^2(r) + \frac{1-z^2}{z^2} J_n^2(r) \right] \\ &= Z_0 \frac{2\pi}{h} \left( \frac{2}{Rk} \right)^{1/3} \\ &\times \sum_{p=0}^{\infty} \left[ Ai'(\beta_p^2)^2 + \beta_p^2 Ai(\beta_p^2)^2 \right] \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

ここで、 $\beta_p$  は次のように定義する。

$$\beta_p = (2p+1) \frac{\pi}{h} \left( \frac{c^2 R}{2\omega^2} \right)^{1/3} \quad (\text{A.10})$$

同様に虚部は次のようにエアリー関数で表すことができる。

$$\begin{aligned} \Im Z(k) &= -Z_0 \frac{2\pi}{h} \left( \frac{2}{Rk} \right)^{1/3} \\ &\times \sum_{p=0}^{\infty} \left[ Ai'(\beta_p^2) Bi'(\beta_p^2) + \beta_p^2 Ai(\beta_p^2) Bi(\beta_p^2) \right] \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

## 参考文献

- [1] J. Schwinger ; On the Classical Radiation of Accelerated Electrons ; Phys. Rev. Vol.75, 1912-1925, 1949

- [2] 今村勤 ; 物理とグリーン関数 ; 岩波書店
- [3] J.B.Murphy, S. Krinsky and R. L. Gluckstern ; Longitudinal wakefield for an electron moving on a circular orbit ; Particle Accel. Vol. 57, 9-64, 1997
- [4] J.D. ジャクソン ; 電磁気学 原書第3版; 吉岡書店 1998年
- [5] J. S. Nodvick and D. S. Saxon ; Suppression of Coherent Radiation by Electrons in a Synchrotron ; Phys. Rev. Vol. 96, 180-184, 1954
- [6] D. C. Sagan, H. Hoffstaetter, C. E. Mayes and U. Sae-Ueng ; Extended 1D method for coherent radiation including shielding ; submitted to Phys. Rev. ST
- [7] X. Huang, J. Safranek, J. Corbett, Y. Nosochkov, J. Sebek and A. Terebilo ; Low alpha mode for SPEAR3 ; SLAC-PUB-12601, 2007
- [8] J. Feikes, P. Kuske, R. Muller and G. Wustefeld ; Proceedings of EPAC 2006, 3308-3310, 2006
- [9] L. I. Schiff ; Production of Particle Energies beyond 200 MeV ; The Review of Scientific Instruments Vol. 17, 6-14, 1946
- [10] T. Nakazato, M. Oyamada, N. Niimura, S. Urasawa, O. Konno, A. Kagaya, R. Kato, T. Kamiyama, Y. Torizuka, T. Nanba, Y. Kondo, Y. Shibata, K. Ishi, T. Ohsaka and M. Ikezawa ; Observation of coherent synchrotron radiation ; Phys. Rev. Vol. 63, 1245-1248, 1989
- [11] A.-S. Muller, I. Birkel, B. Gasharova, E. Huttel, R. Kubat, Y. -L. Mathis, D. A. Moss, W. Mexner, R. Rossmanith, . Wuensch, P. Wesolowski, F. Perez, M. Pont and C. J. Hirschmugl ; Far infrared coherent synchrotron edge radiation at ANKA ; Proceedings of EPAC2005, 2518-2520, 2005
- [12] R. Muller, A. Hoehl, R. Klein, G. Ulm, M. Abo-Bakr, K. Burkmann-Gehrlein, J. Feikes, M. V. Hartrott, J. S. Lee, J. Rahn, U. Schade and G. Wustefeld ; Coherent synchrotron radiation at the metrology light source ; Proceedings of EPAC 2008, 2058-2060, 2008
- [13] R. L. Warnock ; Shield coherent synchrotron radiation and its effect on very short bunches ; SLAC-Pub-5375, 1990
- [14] Y. S. Derbenev, J. Rossbach, E. L. Saldin, and V. D. Shiltsev ; Microbunch radiative tail-head interaction ; TESLA-FEL 95-05, 1995
- [15] Y. S. Derbenev and V. D. Shiltsev ; Transverse effects of microbunch radiative interaction ; SLAC-Pub-7181, 1996
- [16] E. L. Saldin ; On the coherent synchrotron radiation of an electron bunch moving in an arc of a circle ; Nucl. Inst. Meth. A Vol. 398, 373-394, 1997
- [17] G. Stupakov and R. Emma ; CR wake for a short magnet in ultrarelativistic limit ; SLAC-Pub-9242, 2002
- [18] 横谷馨 ; ERL 入門 ; OHO'03, 2003年
- [19] R. L. Warnock and P. Morton ; Fields excited by a beam in a smooth toroidal chamber part I : longitudinal coupling impedance ; SLAC-Pub-4562, 1988
- [20] T. Agoh and K. Yokoya ; Calculation of coherent synchrotron radiation using mesh ; Phys. Rev. ST Accel. Beams Vol. 7, 054403, 2004
- [21] 吾郷智紀 ; 近軸光線近似による干渉性シンクロトロン輻射の解析 ; 学位論文, 東京大学, 2005年
- [22] G. Bassi, T. Agoh, M. Dohlus, L. Giannessi, R. Hajima, A. Kabel, T. Limberg and M. Quattromini ; Overview of CSR codes, Nucl. Inst. Meth. A Vol. 557, 189-204 (2006)
- [23] M. Borland ; Simple method for particle tracking with coherent synchrotron radiation ; Phys. Rev. ST Accel. Beams Vol. 4, 070701, 2001

- [24] D. C. Sagan ; An effecient formalism for simulating the longitudinal kick from coherent synchrotron radiation ; Poceedings of EPAC2006, 2829-2831, 2006
- [25] L. Giannessi ; Simulation codes for high brightness electron beam free-electron laser experiments ; Phy. Rev. ST Accel. Beams Vol. 6, 114802, 2003
- [26] D. C. Sagan ; CSR including shielding in the beam dynamics code Bmad ; Poceedings of EPAC2008, 1634-1636, 2008
- [27] 神谷幸秀 ; 加速器の原理 ; OHO'84
- [28] 鎌田進 ; ビーム物理学入門 ; 総研大加速器科学専攻 2000 年度コアカリキュラム「ビーム物理学」副読本, 2000 年
- [29] 横谷馨 ; ERL track manual
- [30] Linac coherent light source conceptual design report ; SLAC-R-593, Chap.7, 2002
- [31] R. Hajima ; A first-order matrix approach to the analysis of electron beam emittance growth caused by coherent synchrotron radiation ; Jpn. J. Appl. Phys. Vol. 42, 974-976, 2003
- [32] J. H. Wu, J. B. Murphy, V. Yakimenko, I. Ben-Zvi, W. Graves, E. Johnson, S. Krinsky, T. Shaf-tan ans L. H. Yu ; Coherent synchrotron radiation analysis for the photoinjected energy recovery linac and UVFEL projects at the NSLS ; Proceedings of PAC2001, 1866-2868, 2001
- [33] R. Hajima ; Emittance compensation in a return arc of an energy-recovery linac ; Nucl. Instr. Meth. A Vol. 528 335-339, 2004
- [34] 羽島良一、中村典雄、坂中章悟、小林幸則 ; コンパクト ERL の設計研究 ; KEK report 2007-7, 2008 年出版